

MATEMATIKA I.

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

MATEMATIKA I.

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

I. Základy lineární algebry

Matematika I.

Matematika I.

I. Lineární algebra

Vektorové prostory, matice, soustavy lineárních algebraických rovnic, vlastní čísla a vlastní vektory
(1.-3. týden)

Matematika I.

I. Lineární algebra

II. Základy matematické analýzy

Reálná čísla, posloupnosti, funkce, limita, spojitost
(4.-5. týden)

Matematika I.

I. Lineární algebra

II. Základy matematické analýzy

III. Diferenciální počet

Derivace funkce, vlastnosti derivace, výpočet,
aplikace při určování průběhu funkcí, Taylorův
polynom

(6.-8. týden)

Matematika I.

I. Lineární algebra

II. Základy matematické analýzy

III. Diferenciální počet

IV. Integrální počet

Primitivní funkce, integrál, vlastnosti a výpočet neurčitého integrálu, Riemannův integrál a jeho aplikace, numerický výpočet. (9.-13. týden)

Matematika I.

Informace Ústavu technické matematiky (ÚTM FSI ČVUT):

<http://mat.fs.cvut.cz>

Matematika I.

Informace Ústavu technické matematiky (ÚTM FSI ČVUT):

<http://mat.fs.cvut.cz>

Informace o předmětu Matematika I: <https://mat.nipax.cz/mati>

Matematika I.

Informace Ústavu technické matematiky (ÚTM FSI ČVUT):

<http://mat.fs.cvut.cz>

Informace o předmětu Matematika I: <https://mat.nipax.cz/mati>

Garant předmětu: prof. Gejza Dohnal, e-mail: gejza.dohnal@fs.cvut.cz

(kontakt pro zasílání dotazů, námětů, připomínek ...)

Matematika I.

Informace Ústavu technické matematiky (ÚTM FSI ČVUT):

<http://mat.fs.cvut.cz>

Informace o předmětu Matematika I: <https://mat.nipax.cz/mati>

Garant předmětu: prof. Gejza Dohnal, e-mail: gejza.dohnal@fs.cvut.cz

(kontakt pro zasílání dotazů, námětů, připomínek ...)

Přednáška: 2x v týdnu 2 hodiny (možnost i v angličtině).

Matematika I.

Informace Ústavu technické matematiky (ÚTM FSI ČVUT):

<http://mat.fs.cvut.cz>

Informace o předmětu Matematika I: <https://mat.nipax.cz/mati>

Garant předmětu: prof. Gejza Dohnal, e-mail: gejza.dohnal@fs.cvut.cz

(kontakt pro zasílání dotazů, námětů, připomínek ...)

Přednáška: 2x v týdnu 2 hodiny (možnost i v angličtině).

Cvičení: 2x v týdnu dle rozvrhu (povinné)

Matematika I.

Informace Ústavu technické matematiky (ÚTM FSI ČVUT):

<http://mat.fs.cvut.cz>

Informace o předmětu Matematika I: <https://mat.nipax.cz/mati>

Garant předmětu: prof. Gejza Dohnal, e-mail: gejza.dohnal@fs.cvut.cz
(kontakt pro zasílání dotazů, námětů, připomínek ...)

Přednáška: 2x v týdnu 2 hodiny (možnost i v angličtině).

Cvičení: 2x v týdnu dle rozvrhu (povinné)

Úrovně A a B: (Úroveň je volitelná. Alfa je standardní úroveň, vyžaduje se teorie a její aplikace. Úroveň Beta je poněkud “odlehčená”. Alfa je nutná až pro absolvování TZSI.

Matematika I.

Informace Ústavu technické matematiky (ÚTM FSI ČVUT):

<http://mat.fs.cvut.cz>

Informace o předmětu Matematika I: <https://mat.nipax.cz/mati>

Garant předmětu: prof. Gejza Dohnal, e-mail: gejza.dohnal@fs.cvut.cz

(kontakt pro zasílání dotazů, námětů, připomínek ...)

Přednáška: 2x v týdnu 2 hodiny (možnost i v angličtině).

Cvičení: 2x v týdnu dle rozvrhu (povinné)

Úrovně A a B: (Úroveň je volitelná. Alfa je standardní úroveň, vyžaduje se teorie a její aplikace. Úroveň Beta je poněkud “odlehčená”. Alfa je nutná až pro absolvování TZSI.

Seminář z Matematiky I: volitelný, pondělí, úterý a středa, vždy KN:A-214

- úroveň A: úterý 17:45 (Kesslerová) a středa 16:00 (Majlingová)
- úroveň B: pondělí 17:45 (Bodnár)

Matematika I.

Informace Ústavu technické matematiky (ÚTM FSI ČVUT):

<http://mat.fs.cvut.cz>

Informace o předmětu Matematika I: <https://mat.nipax.cz/mati>

Garant předmětu: prof. Gejza Dohnal, e-mail: gejza.dohnal@fs.cvut.cz

(kontakt pro zasílání dotazů, námětů, připomínek ...)

Přednáška: 2x v týdnu 2 hodiny (možnost i v angličtině).

Cvičení: 2x v týdnu dle rozvrhu (povinné)

Úrovně A a B: (Úroveň je volitelná. Alfa je standardní úroveň, vyžaduje se teorie a její aplikace. Úroveň Beta je poněkud “odlehčená”. Alfa je nutná až pro absolvování TZSI.

Seminář z Matematiky I: volitelný, pondělí, úterý a středa, vždy KN:A-214

- úroveň A: úterý 17:45 (Kesslerová) a středa 16:00 (Majlingová)
- úroveň B: pondělí 17:45 (Bodnár)

Repetitorium: úterý 17:45 KN A-311 (Kittlerová, Mráz) (od 17.10, 6 týdnů, zápočet)

Matematika I.

Základní doporučená literatura:

- [1] **J. Neustupa: Matematika I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2010 (a starší vydání: 2008...).
- [2] **S. Kračmar, F. Mráz, J. Neustupa: Sbíрка příkladů z Matematiky I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013 (i starší, ale s jiným číslováním příkladů). Skripta obsahují vybrané úlohy ze zkoušek z minulých let.

Matematika I.

Základní doporučená literatura:

- [1] **J.Neustupa: Matematika I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2010 (a starší vydání: 2008...).
- [2] **S. Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: Sbíрка příkladů z Matematiky I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013 (i starší, ale s jiným číslováním příkladů). Skripta obsahují vybrané úlohy ze zkoušek z minulých let.

Další doporučená literatura

- [5] **E.Brožíková, M.Kittlerová: Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.** Řešené příklady. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2004.
- [6] **MATEMATIKA I - ukázka zkouškových testů.** Webové stránky ÚTM, odkaz Matematika I, též tištěné ve firmě Copia v budově na Karlově nám.
- [7] **J.Neustupa: Mathematics I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2004. (Anglická verze skripta [1].)

Matematika I.

Literatura k doplnění znalostí a počítání příkladů ze středoškolské matematiky:

- [8] **F. Mráz: Opakování středoškolské matematiky** (vybrané partie).
Webové stránky ÚTM pod odkazem Matematika I.
- [9] **J. Černý a kolektiv: Matematika - přijímací zkoušky na ČVUT.**
Nakladatelství ČVUT Praha, 2007 (stručný přehled a příklady ze středoškolské matematiky, částečně i řešené).

Matematika I.

Literatura k doplnění znalostí a počítání příkladů ze středoškolské matematiky:

- [8] **F. Mráz: Opakování středoškolské matematiky** (vybrané partie).
Webové stránky ÚTM pod odkazem Matematika I.
- [9] **J. Černý a kolektiv: Matematika - přijímací zkoušky na ČVUT.**
Nakladatelství ČVUT Praha, 2007 (stručný přehled a příklady ze středoškolské matematiky, částečně i řešené).

Literatura pro ty, kteří to se studiem techniky myslí vážně:

- [10] **K. Rektorys a spol.: Přehled užité matematiky I, II.** Nakladatelství Prometheus, 7. vydání 2000.
(Encyklopedie aplikované matematiky)



Matematika I.

I. Lineární algebra

- I.1. Reálný aritmetický vektorový prostor
- I.2. Lineární závislost a nezávislost skupiny vektorů
- I.3. Vektorový prostor, obecná definice
- I.4. Dimenze a báze vektorového prostoru, podprostor
- I.5. Matice
- I.6. Hodnota matice
- I.7. Determinant matice
- I.8. Inverzní matice
- I.9. Soustava lineárních algebraických rovnic
- I.10. Frobeniova věta
- I.11. Metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic
- I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Matematika I.

I. Lineární algebra

- I.1. Reálný aritmetický vektorový prostor
- I.2. Lineární závislost a nezávislost skupiny vektorů
- I.3. Vektorový prostor, obecná definice
- I.4. Dimenze a báze vektorového prostoru, podprostor
- I.5. Matice
- I.6. Hodnota matice
- I.7. Determinant matice
- I.8. Inverzní matice
- I.9. Soustava lineárních algebraických rovnic
- I.10. Frobeniova věta
- I.11. Metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic
- I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Matematika I.

0. Reálná předmluva

Matematika I.

0. Reálná předmluva

Vlastnosti reálných čísel: $(\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1)$

Matematika I.

0. Reálná předmluva

Vlastnosti reálných čísel: $(\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1)$

- **je definována operace sčítání** tak, že pro všechna $a, b, c \in \mathbf{R}$ je

Matematika I.

0. Reálná předmluva

Vlastnosti reálných čísel: $(\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1)$

- **je definována operace sčítání** tak, že pro všechna $a, b, c \in \mathbf{R}$ je
 $a + b = b + a \in \mathbf{R}$ (**sčítání je komutativní**)

Matematika I.

0. Reálná předmluva

Vlastnosti reálných čísel: $(\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1)$

- **je definována operace sčítání** tak, že pro všechna $a, b, c \in \mathbf{R}$ je
$$a + b = b + a \in \mathbf{R} \text{ (sčítání je komutativní)}$$
$$u + (v + w) = (u + v) + w \text{ (sčítání je asociativní)}$$

Matematika I.

0. Reálná předmluva

Vlastnosti reálných čísel: $(\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1)$

- je definována operace sčítání tak, že pro všechna $a, b, c \in \mathbf{R}$ je
$$a + b = b + a \in \mathbf{R} \text{ (sčítání je komutativní)}$$
$$u + (v + w) = (u + v) + w \text{ (sčítání je asociativní)}$$
- existuje nulový prvek $0 \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $a \in \mathbf{R}$ je $0 + a \in \mathbf{R}$

Matematika I.

0. Reálná předmluva

Vlastnosti reálných čísel: $(\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1)$

- je definována operace sčítání tak, že pro všechna $a, b, c \in \mathbf{R}$ je
$$a + b = b + a \in \mathbf{R} \text{ (sčítání je komutativní)}$$
$$u + (v + w) = (u + v) + w \text{ (sčítání je asociativní)}$$
- existuje **nulový prvek** $0 \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $a \in \mathbf{R}$ je $0 + a \in \mathbf{R}$
- pro každé $x \in \mathbf{R}$ existuje **opačný prvek** $y \in \mathbf{R}$ tak, že $x + y = 0$, $y = -x$

Matematika I.

0. Reálná předmluva

Vlastnosti reálných čísel: $(\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1)$

- je definována operace sčítání tak, že pro všechna $a, b, c \in \mathbf{R}$ je
$$a + b = b + a \in \mathbf{R} \text{ (sčítání je komutativní)}$$
$$u + (v + w) = (u + v) + w \text{ (sčítání je asociativní)}$$
 - existuje **nulový prvek** $0 \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $a \in \mathbf{R}$ je $0 + a \in \mathbf{R}$
 - pro každé $x \in \mathbf{R}$ existuje **opačný prvek** $y \in \mathbf{R}$ tak, že $x + y = 0$, $y = -x$
- je definována operace násobení tak, že pro libovolné $a, b, c \in \mathbf{R}$ je

Matematika I.

0. Reálná předmluva

Vlastnosti reálných čísel: $(\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1)$

- je definována operace sčítání tak, že pro všechna $a, b, c \in \mathbf{R}$ je

$$a + b = b + a \in \mathbf{R} \quad (\text{sčítání je komutativní})$$

$$u + (v + w) = (u + v) + w \quad (\text{sčítání je asociativní})$$

- existuje nulový prvek $0 \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $a \in \mathbf{R}$ je $0 + a \in \mathbf{R}$
- pro každé $x \in \mathbf{R}$ existuje opačný prvek $y \in \mathbf{R}$ tak, že $x + y = 0$, $y = -x$
- je definována operace násobení tak, že pro libovolné $a, b, c \in \mathbf{R}$ je

$$a \cdot b = b \cdot a \in \mathbf{R} \quad (\text{násobení je komutativní})$$

Matematika I.

0. Reálná předmluva

Vlastnosti reálných čísel: $(\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1)$

- je definována operace sčítání tak, že pro všechna $a, b, c \in \mathbf{R}$ je

$$a + b = b + a \in \mathbf{R} \quad (\text{sčítání je komutativní})$$

$$u + (v + w) = (u + v) + w \quad (\text{sčítání je asociativní})$$

- existuje **nulový prvek** $0 \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $a \in \mathbf{R}$ je $0 + a \in \mathbf{R}$
- pro každé $x \in \mathbf{R}$ existuje **opačný prvek** $y \in \mathbf{R}$ tak, že $x + y = 0$, $y = -x$
- je definována operace násobení tak, že pro libovolné $a, b, c \in \mathbf{R}$ je

$$a \cdot b = b \cdot a \in \mathbf{R} \quad (\text{násobení je komutativní})$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad (\text{násobení je asociativní})$$

Matematika I.

0. Reálná předmluva

Vlastnosti reálných čísel: $(\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1)$

- je definována operace sčítání tak, že pro všechna $a, b, c \in \mathbf{R}$ je
$$a + b = b + a \in \mathbf{R} \text{ (sčítání je komutativní)}$$
$$u + (v + w) = (u + v) + w \text{ (sčítání je asociativní)}$$
 - existuje **nulový prvek** $0 \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $a \in \mathbf{R}$ je $0 + a \in \mathbf{R}$
 - pro každé $x \in \mathbf{R}$ existuje **opačný prvek** $y \in \mathbf{R}$ tak, že $x + y = 0$, $y = -x$
- je definována operace násobení tak, že pro libovolné $a, b, c \in \mathbf{R}$ je
$$a \cdot b = b \cdot a \in \mathbf{R} \text{ (násobení je komutativní)}$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \text{ (násobení je asociativní)}$$
 - existuje **jednotkový prvek** $1 \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $a \in \mathbf{R}$ je $1 \cdot a \in \mathbf{R}$

Matematika I.

0. Reálná předmluva

Vlastnosti reálných čísel: $(\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1)$

- **je definována operace sčítání** tak, že pro všechna $a, b, c \in \mathbf{R}$ je
$$a + b = b + a \in \mathbf{R} \text{ (sčítání je komutativní)}$$
$$u + (v + w) = (u + v) + w \text{ (sčítání je asociativní)}$$
 - existuje **nulový prvek** $0 \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $a \in \mathbf{R}$ je $0 + a \in \mathbf{R}$
 - pro každé $x \in \mathbf{R}$ existuje **opačný prvek** $y \in \mathbf{R}$ tak, že $x + y = 0$, $y = -x$
- **je definována operace násobení** tak, že pro libovolné $a, b, c \in \mathbf{R}$ je
$$a \cdot b = b \cdot a \in \mathbf{R} \text{ (násobení je komutativní)}$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \text{ (násobení je asociativní)}$$
 - existuje **jednotkový prvek** $1 \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $a \in \mathbf{R}$ je $1 \cdot a \in \mathbf{R}$
 - pro každé reálné x , $x \neq 0$ existuje v \mathbf{R} **opačný prvek** $y \in \mathbf{R}$ tak, že $x \cdot y = 1$

Matematika I.

0. Reálná předmluva

Vlastnosti reálných čísel: $(\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1)$

- je definována operace **sčítání** tak, že pro všechna $a, b, c \in \mathbf{R}$ je
$$a + b = b + a \in \mathbf{R} \text{ (sčítání je komutativní)}$$
$$u + (v + w) = (u + v) + w \text{ (sčítání je asociativní)}$$
 - existuje **nulový prvek** $0 \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $a \in \mathbf{R}$ je $0 + a \in \mathbf{R}$
 - pro každé $x \in \mathbf{R}$ existuje **opačný prvek** $y \in \mathbf{R}$ tak, že $x + y = 0$, $y = -x$
- je definována operace **násobení** tak, že pro libovolné $a, b, c \in \mathbf{R}$ je
$$a \cdot b = b \cdot a \in \mathbf{R} \text{ (násobení je komutativní)}$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \text{ (násobení je asociativní)}$$
 - existuje **jednotkový prvek** $1 \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $a \in \mathbf{R}$ je $1 \cdot a \in \mathbf{R}$
 - pro každé reálné x , $x \neq 0$ existuje v \mathbf{R} **opačný prvek** $y \in \mathbf{R}$ tak, že $x \cdot y = 1$
- násobení a sčítání jsou **distributivní**: $\forall a, b, c \in \mathbf{R}: a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Matematika I.

těleso reálných čísel

0. Reálná předmluva

Vlastnosti reálných čísel: $(\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1)$

- je definována operace **sčítání** tak, že pro všechna $a, b, c \in \mathbf{R}$ je
$$a + b = b + a \in \mathbf{R} \quad (\text{sčítání je komutativní})$$
$$u + (v + w) = (u + v) + w \quad (\text{sčítání je asociativní})$$
 - existuje **nulový prvek** $0 \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $a \in \mathbf{R}$ je $0 + a \in \mathbf{R}$
 - pro každé $x \in \mathbf{R}$ existuje **opačný prvek** $y \in \mathbf{R}$ tak, že $x + y = 0$, $y = -x$
- je definována operace **násobení** tak, že pro libovolné $a, b, c \in \mathbf{R}$ je
$$a \cdot b = b \cdot a \in \mathbf{R} \quad (\text{násobení je komutativní})$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad (\text{násobení je asociativní})$$
 - existuje **jednotkový prvek** $1 \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $a \in \mathbf{R}$ je $1 \cdot a \in \mathbf{R}$
 - pro každé reálné x , $x \neq 0$ existuje v \mathbf{R} **opačný prvek** $y \in \mathbf{R}$ tak, že $x \cdot y = 1$
- násobení a sčítání jsou **distributivní**: $\forall a, b, c \in \mathbf{R}: a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Matematika I.

I. Lineární algebra

I.1. Vektorový prostor

Matematika I.

I. Lineární algebra

I.1. Vektorový prostor

Definice: Je-li \mathbf{R} množina reálných čísel a n je nějaké přirozené číslo, potom uspořádanou n -tici reálných čísel $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ budeme nazývat (*reálným*) *aritmetickým vektorem*. Číslo a_i nazýváme *i -tou složkou* vektoru \mathbf{a} . Číslo n je *rozměr* vektoru \mathbf{a} .

Matematika I.

I. Lineární algebra

I.1. Vektorový prostor

Definice: Je-li \mathbf{R} množina reálných čísel a n je nějaké přirozené číslo, potom uspořádanou n -tici reálných čísel $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ budeme nazývat (*reálným*) *aritmetickým vektorem*. Číslo a_i nazýváme i -tou *složkou* vektoru \mathbf{a} . Číslo n je *rozměr* vektoru \mathbf{a} .

Sčítání aritmetických vektorů:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$$

Matematika I.

I. Lineární algebra

I.1. Vektorový prostor

Definice: Je-li \mathbf{R} množina reálných čísel a n je nějaké přirozené číslo, potom uspořádanou n -tici reálných čísel $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ budeme nazývat (*reálným*) *aritmetickým vektorem*. Číslo a_i nazýváme i -tou *složkou* vektoru \mathbf{a} . Číslo n je *rozměr* vektoru \mathbf{a} .

Sčítání aritmetických vektorů:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$$

Násobení vektoru reálným číslem $r \in \mathbf{R}$:

$$r \cdot \mathbf{a} = r \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (r \cdot a_1, r \cdot a_2, \dots, r \cdot a_n)$$

I.1. Vektorový prostor: Reálný aritmetický vektorový prostor

Reálné aritmetické vektory o rozměru n tvoří *reálný aritmetický vektorový prostor*, který budeme označovat $V(\mathbf{R}^n)$ nebo zkráceně pouze \mathbf{R}^n .

I.1. Vektorový prostor: Reálný aritmetický vektorový prostor

Reálné aritmetické vektory o rozměru n tvoří *reálný aritmetický vektorový prostor*, který budeme označovat $V(\mathbf{R}^n)$ nebo zkráceně pouze \mathbf{R}^n .

Vlastnosti:

I.1. Vektorový prostor: Reálný aritmetický vektorový prostor

Reálné aritmetické vektory o rozměru n tvoří *reálný aritmetický vektorový prostor*, který budeme označovat $V(\mathbf{R}^n)$ nebo zkráceně pouze \mathbf{R}^n .

Vlastnosti:

- pro všechna $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ je $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$

I.1. Vektorový prostor: Reálný aritmetický vektorový prostor

Reálné aritmetické vektory o rozměru n tvoří *reálný aritmetický vektorový prostor*, který budeme označovat $V(\mathbf{R}^n)$ nebo zkráceně pouze \mathbf{R}^n .

Vlastnosti:

- pro všechna $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ je $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$
- **existuje nulový prvek** $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ tak, že pro všechna $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ je $\mathbf{0} + \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$

I.1. Vektorový prostor: Reálný aritmetický vektorový prostor

Reálné aritmetické vektory o rozměru n tvoří *reálný aritmetický vektorový prostor*, který budeme označovat $V(\mathbf{R}^n)$ nebo zkráceně pouze \mathbf{R}^n .

Vlastnosti:

- pro všechna $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ je $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$
- **existuje nulový prvek** $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ tak, že pro všechna $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ je $\mathbf{0} + \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$
- pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ **existuje opačný prvek** $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ tak, že $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$

I.1. Vektorový prostor: Reálný aritmetický vektorový prostor

Reálné aritmetické vektory o rozměru n tvoří *reálný aritmetický vektorový prostor*, který budeme označovat $V(\mathbf{R}^n)$ nebo zkráceně pouze \mathbf{R}^n .

Vlastnosti:

- pro všechna $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ je $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$
- existuje nulový prvek $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ tak, že pro všechna $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ je $\mathbf{0} + \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$
- pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ existuje opačný prvek $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ tak, že $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$
- sčítání je asociativní: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

I.1. Vektorový prostor: Reálný aritmetický vektorový prostor

Reálné aritmetické vektory o rozměru n tvoří *reálný aritmetický vektorový prostor*, který budeme označovat $V(\mathbf{R}^n)$ nebo zkráceně pouze \mathbf{R}^n .

Vlastnosti:

- pro všechna $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ je $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$
- existuje nulový prvek $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ tak, že pro všechna $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ je $\mathbf{0} + \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$
- pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ existuje opačný prvek $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ tak, že $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$
- sčítání je asociativní: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- sčítání je komutativní: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

I.1. Vektorový prostor: Reálný aritmetický vektorový prostor

Reálné aritmetické vektory o rozměru n tvoří *reálný aritmetický vektorový prostor*, který budeme označovat $V(\mathbf{R}^n)$ nebo zkráceně pouze \mathbf{R}^n .

Vlastnosti:

- pro všechna $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ je $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$
- existuje nulový prvek $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ tak, že pro všechna $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ je $\mathbf{0} + \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$
- pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ existuje opačný prvek $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ tak, že $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$
- sčítání je asociativní: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- sčítání je komutativní: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- pro libovolné $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, $r \in \mathbf{R}$ je $r \cdot \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$

I.1. Vektorový prostor: Reálný aritmetický vektorový prostor

Reálné aritmetické vektory o rozměru n tvoří *reálný aritmetický vektorový prostor*, který budeme označovat $V(\mathbf{R}^n)$ nebo zkráceně pouze \mathbf{R}^n .

Vlastnosti:

- pro všechna $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ je $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$
- **existuje nulový prvek** $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ tak, že pro všechna $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ je $\mathbf{0} + \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$
- pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ **existuje opačný prvek** $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ tak, že $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$
- sčítání je **asociativní**: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- sčítání je **komutativní**: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- pro libovolné $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, $r \in \mathbf{R}$ je $r \cdot \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$
- násobení číslem je **asociativní**: $\forall a, b \in \mathbf{R}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n: a \cdot (b \cdot \mathbf{x}) = (ab) \cdot \mathbf{x}$

I.1. Vektorový prostor: Reálný aritmetický vektorový prostor

Reálné aritmetické vektory o rozměru n tvoří *reálný aritmetický vektorový prostor*, který budeme označovat $V(\mathbf{R}^n)$ nebo zkráceně pouze \mathbf{R}^n .

Vlastnosti:

- pro všechna $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ je $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$
- **existuje nulový prvek** $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ tak, že pro všechna $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ je $\mathbf{0} + \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$
- pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ **existuje opačný prvek** $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ tak, že $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$
- sčítání je **asociativní**: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- sčítání je **komutativní**: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- pro libovolné $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, $r \in \mathbf{R}$ je $r \cdot \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$
- násobení číslem je **asociativní**: $\forall a, b \in \mathbf{R}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n: a \cdot (b \cdot \mathbf{x}) = (ab) \cdot \mathbf{x}$
- násobení číslem je **distributivní**:

I.1. Vektorový prostor: Reálný aritmetický vektorový prostor

Reálné aritmetické vektory o rozměru n tvoří *reálný aritmetický vektorový prostor*, který budeme označovat $V(\mathbf{R}^n)$ nebo zkráceně pouze \mathbf{R}^n .

Vlastnosti:

- pro všechna $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ je $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$
- **existuje nulový prvek** $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ tak, že pro všechna $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ je $\mathbf{0} + \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$
- pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ **existuje opačný prvek** $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ tak, že $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$
- sčítání je **asociativní**: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- sčítání je **komutativní**: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- pro libovolné $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, $r \in \mathbf{R}$ je $r \cdot \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$
- násobení číslem je **asociativní**: $\forall a, b \in \mathbf{R}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n: a \cdot (b \cdot \mathbf{x}) = (ab) \cdot \mathbf{x}$
- násobení číslem je **distributivní**:

$$\forall a \in \mathbf{R}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n: a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$$

I.1. Vektorový prostor: Reálný aritmetický vektorový prostor

Reálné aritmetické vektory o rozměru n tvoří *reálný aritmetický vektorový prostor*, který budeme označovat $V(\mathbf{R}^n)$ nebo zkráceně pouze \mathbf{R}^n .

Vlastnosti:

- pro všechna $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ je $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$
- **existuje nulový prvek** $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ tak, že pro všechna $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ je $\mathbf{0} + \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$
- pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ **existuje opačný prvek** $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ tak, že $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$
- sčítání je **asociativní**: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- sčítání je **komutativní**: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- pro libovolné $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, $r \in \mathbf{R}$ je $r \cdot \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$
- násobení číslem je **asociativní**: $\forall a, b \in \mathbf{R}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n: a \cdot (b \cdot \mathbf{x}) = (ab) \cdot \mathbf{x}$
- násobení číslem je **distributivní**:

$$\forall a \in \mathbf{R}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n: a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$$

$$\forall a, b \in \mathbf{R}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n: (a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$$

I. 2. Lineární závislost a nezávislost skupiny vektorů

Je-li $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ skupina vektorů z vektorového prostoru $V(\mathbf{R}^n)$ a r_1, r_2, \dots, r_k jsou reálná čísla, potom vektor \mathbf{v} , který vznikne součtem

$$\mathbf{v} = r_1 \cdot \mathbf{a}_1 + r_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + r_k \cdot \mathbf{a}_k,$$

nazýváme *lineární kombinací* vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$.

I. 2. Lineární závislost a nezávislost skupiny vektorů

Je-li $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ skupina vektorů z vektorového prostoru $V(\mathbf{R}^n)$ a r_1, r_2, \dots, r_k jsou reálná čísla, potom vektor \mathbf{v} , který vznikne součtem

$$\mathbf{v} = r_1 \cdot \mathbf{a}_1 + r_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + r_k \cdot \mathbf{a}_k,$$

nazýváme *lineární kombinací* vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$.

Definice: Množina vektorů $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ z vektorového prostoru $V(\mathbf{R}^n)$ je *lineárně závislá* právě tehdy, když existuje k -tice čísel $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ z nichž alespoň jedno je nenulové taková, že

$$r_1 \cdot \mathbf{a}_1 + r_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + r_k \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

I. 2. Lineární závislost a nezávislost skupiny vektorů

Je-li $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ skupina vektorů z vektorového prostoru $V(\mathbb{R}^n)$ a r_1, r_2, \dots, r_k jsou reálná čísla, potom vektor \mathbf{v} , který vznikne součtem

$$\mathbf{v} = r_1 \cdot \mathbf{a}_1 + r_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + r_k \cdot \mathbf{a}_k,$$

nazýváme *lineární kombinací* vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$.

Definice: Množina vektorů $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ z vektorového prostoru $V(\mathbb{R}^n)$ je *lineárně závislá* právě tehdy, když existuje k -tice čísel $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ z nichž alespoň jedno je nenulové taková, že

$$r_1 \cdot \mathbf{a}_1 + r_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + r_k \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

Poslední rovnice napsaná po složkách má tvar soustavy lineárních algebraických rovnic

$$r_1 \cdot a_{11} + r_2 \cdot a_{21} + \dots + r_k \cdot a_{k1} = 0$$

$$r_1 \cdot a_{12} + r_2 \cdot a_{22} + \dots + r_k \cdot a_{k2} = 0$$

.....

$$r_1 \cdot a_{1n} + r_2 \cdot a_{2n} + \dots + r_k \cdot a_{kn} = 0$$

I. 2. Lineární závislost a nezávislost skupiny vektorů

Je-li $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ skupina vektorů z vektorového prostoru $V(\mathbb{R}^n)$ a r_1, r_2, \dots, r_k jsou reálná čísla, potom vektor \mathbf{v} , který vznikne součtem

$$\mathbf{v} = r_1 \cdot \mathbf{a}_1 + r_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + r_k \cdot \mathbf{a}_k,$$

nazýváme *lineární kombinací* vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$.

Definice: Množina vektorů $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ z vektorového prostoru $V(\mathbb{R}^n)$ je *lineárně závislá* právě tehdy, když existuje k -tice čísel $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ z nichž alespoň jedno je nenulové taková, že

$$r_1 \cdot \mathbf{a}_1 + r_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + r_k \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

Poslední rovnice napsaná po složkách má tvar soustavy lineárních algebraických rovnic

$$r_1 \cdot a_{11} + r_2 \cdot a_{21} + \dots + r_k \cdot a_{k1} = 0$$

$$r_1 \cdot a_{12} + r_2 \cdot a_{22} + \dots + r_k \cdot a_{k2} = 0$$

.....

$$r_1 \cdot a_{1n} + r_2 \cdot a_{2n} + \dots + r_k \cdot a_{kn} = 0$$

Lineární nezávislost (LNZ) znamená, že tato soustava má jediné, pouze nulové řešení.

I. 2. Lineární závislost a nezávislost skupiny vektorů

Je-li $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ skupina vektorů z vektorového prostoru $V(\mathbf{R}^n)$ a r_1, r_2, \dots, r_k jsou reálná čísla, potom vektor \mathbf{v} , který vznikne součtem

$$\mathbf{v} = r_1 \cdot \mathbf{a}_1 + r_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + r_k \cdot \mathbf{a}_k,$$

nazýváme *lineární kombinací* vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$.

Důkaz:

I. 2. Lineární závislost a nezávislost skupiny vektorů

Je-li $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ skupina vektorů z vektorového prostoru $V(\mathbf{R}^n)$ a r_1, r_2, \dots, r_k jsou reálná čísla, potom vektor \mathbf{v} , který vznikne součtem

$$\mathbf{v} = r_1 \cdot \mathbf{a}_1 + r_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + r_k \cdot \mathbf{a}_k,$$

nazýváme *lineární kombinací* vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$.

Definice: Množina vektorů $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ z vektorového prostoru $V(\mathbf{R}^n)$ je *lineárně závislá* právě tehdy, když existuje k -tice čísel $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ z nichž alespoň jedno je nenulové taková, že

$$r_1 \cdot \mathbf{a}_1 + r_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + r_k \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

Důkaz:

I. 2. Lineární závislost a nezávislost skupiny vektorů

Je-li $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ skupina vektorů z vektorového prostoru $V(\mathbb{R}^n)$ a r_1, r_2, \dots, r_k jsou reálná čísla, potom vektor \mathbf{v} , který vznikne součtem

$$\mathbf{v} = r_1 \cdot \mathbf{a}_1 + r_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + r_k \cdot \mathbf{a}_k,$$

nazýváme *lineární kombinací* vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$.

Definice: Množina vektorů $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ z vektorového prostoru $V(\mathbb{R}^n)$ je *lineárně závislá* právě tehdy, když existuje k -tice čísel $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ z nichž alespoň jedno je nenulové taková, že

$$r_1 \cdot \mathbf{a}_1 + r_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + r_k \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

Tvrzení: Množina vektorů $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ z vektorového prostoru $V(\mathbb{R}^n)$ je *lineárně závislá* právě tehdy, když alespoň jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů z této množiny.

Důkaz:

I.3. Vektorový prostor: Obecnější definice

Definice: Množinu V budeme nazývat *vektorovým prostorem*, pokud jsou pro její prvky (*vektory*) definovány operace

- sčítání, pro kterou platí
 - ▶ pro všechna $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in V$ je $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$
 - ▶ existuje nulový prvek $\mathbf{0} \in V$: pro všechna $\mathbf{v} \in V$ je $\mathbf{0} + \mathbf{v} \in V$
 - ▶ pro každé $\mathbf{w} \in V$ existuje opačný prvek $\mathbf{v} \in V$ tak, že $\mathbf{w} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$
 - ▶ sčítání je asociativní: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
 - ▶ sčítání je komutativní: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- násobení reálným číslem (skalárem), pro které platí
 - ▶ pro libovolné $\mathbf{v} \in V$, $a \in \mathbf{R}$ existuje prvek $a \cdot \mathbf{v} \in V$
 - ▶ pro libovolné $\mathbf{v} \in V$ a jednotkový prvek $1 \in \mathbf{R}$ platí $1 \cdot \mathbf{v} \in V$
 - ▶ asociativní zákon: pro všechna $a, b \in \mathbf{R}$, $\mathbf{w} \in V$ je $a(b \cdot \mathbf{w}) = (ab) \cdot \mathbf{w}$
 - ▶ distributivní zákon: pro všechna $a, b \in \mathbf{R}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí
$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v} \quad \text{a také} \quad (a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$$

I.3. Vektorový prostor: Poznámky:

I.3. Vektorový prostor: Poznámky:

- Obecná definice definuje vektorový prostor $V(\mathbf{U})$ s nosičem \mathbf{U} nad tělesem \mathbf{F} (\mathbf{F} je zpravidla těleso reálných či komplexních čísel)

I.3. Vektorový prostor: Poznámky:

- Obecná definice definuje vektorový prostor $V(\mathbf{U})$ s nosičem \mathbf{U} nad tělesem \mathbf{F} (\mathbf{F} je zpravidla těleso reálných či komplexních čísel)
- pokud je \mathbf{F} množina reálných čísel \mathbf{R} , hovoříme o reálném vektorovém prostoru,

I.3. Vektorový prostor: Poznámky:

- Obecná definice definuje vektorový prostor $V(\mathbf{U})$ s nosičem \mathbf{U} nad tělesem \mathbf{F} (\mathbf{F} je zpravidla těleso reálných či komplexních čísel)
 - pokud je \mathbf{F} množina reálných čísel \mathbf{R} , hovoříme o reálném vektorovém prostoru,
 - je-li \mathbf{F} tělesem komplexních čísel, potom mluvíme o komplexním vektorovém prostoru.

I.3. Vektorový prostor: Poznámky:

- Obecná definice definuje vektorový prostor $V(\mathbf{U})$ s nosičem \mathbf{U} nad tělesem \mathbf{F} (\mathbf{F} je zpravidla těleso reálných či komplexních čísel)
 - pokud je \mathbf{F} množina reálných čísel \mathbf{R} , hovoříme o reálném vektorovém prostoru,
 - je-li \mathbf{F} tělesem komplexních čísel, potom mluvíme o komplexním vektorovém prostoru.
- Nosič prostoru \mathbf{R}^n je vlastně kartézským součinem $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}$

I.3. Vektorový prostor: Poznámky:

- Obecná definice definuje vektorový prostor $V(U)$ s nosičem U nad tělesem F (F je zpravidla těleso reálných či komplexních čísel)
 - pokud je F množina reálných čísel \mathbf{R} , hovoříme o reálném vektorovém prostoru,
 - je-li F tělesem komplexních čísel, potom mluvíme o komplexním vektorovém prostoru.
- Nosič prostoru \mathbf{R}^n je vlastně kartézským součinem $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}$
- Nulový vektor je určen jednoznačně (je ve $V(U)$ jediný)

I.3. Vektorový prostor: Poznámky:

- Obecná definice definuje vektorový prostor $V(U)$ s nosičem U nad tělesem F (F je zpravidla těleso reálných či komplexních čísel)
 - pokud je F množina reálných čísel \mathbf{R} , hovoříme o reálném vektorovém prostoru,
 - je-li F tělesem komplexních čísel, potom mluvíme o komplexním vektorovém prostoru.
- Nosič prostoru \mathbf{R}^n je vlastně kartézským součinem $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}$
- Nulový vektor je určen jednoznačně (je ve $V(U)$ jediný)
- Opačný vektor k vektoru \mathbf{x} značíme $-\mathbf{x}$ a je také určen jednoznačně.

I.3. Vektorový prostor: Poznámky:

- Obecná definice definuje vektorový prostor $V(U)$ s nosičem U nad tělesem F (F je zpravidla těleso reálných či komplexních čísel)
 - pokud je F množina reálných čísel \mathbf{R} , hovoříme o reálném vektorovém prostoru,
 - je-li F tělesem komplexních čísel, potom mluvíme o komplexním vektorovém prostoru.
- Nosič prostoru \mathbf{R}^n je vlastně kartézským součinem $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}$
- Nulový vektor je určen jednoznačně (je ve $V(U)$ jediný)
- Opačný vektor k vektoru \mathbf{x} značíme $-\mathbf{x}$ a je také určen jednoznačně.
- Pro každý vektor \mathbf{x} platí: $-(-\mathbf{x}) = \mathbf{x}$; $-\mathbf{x} = (-1) \cdot \mathbf{x}$

I.3. Vektorový prostor: Poznámky:

- Obecná definice definuje vektorový prostor $V(U)$ s nosičem U nad tělesem F (F je zpravidla těleso reálných či komplexních čísel)
 - pokud je F množina reálných čísel \mathbf{R} , hovoříme o reálném vektorovém prostoru,
 - je-li F tělesem komplexních čísel, potom mluvíme o komplexním vektorovém prostoru.
- Nosič prostoru \mathbf{R}^n je vlastně kartézským součinem $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}$
- Nulový vektor je určen jednoznačně (je ve $V(U)$ jediný)
- Opačný vektor k vektoru \mathbf{x} značíme $-\mathbf{x}$ a je také určen jednoznačně.
- Pro každý vektor \mathbf{x} platí: $-(-\mathbf{x}) = \mathbf{x}$; $-\mathbf{x} = (-1) \cdot \mathbf{x}$
- Pro každý vektor \mathbf{x} je $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$; podobně pro každý skalár r je $r \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

I.3. Vektorový prostor: Poznámky:

- Obecná definice definuje vektorový prostor $V(U)$ s nosičem U nad tělesem F (F je zpravidla těleso reálných či komplexních čísel)
 - pokud je F množina reálných čísel \mathbf{R} , hovoříme o reálném vektorovém prostoru,
 - je-li F tělesem komplexních čísel, potom mluvíme o komplexním vektorovém prostoru.
- Nosič prostoru \mathbf{R}^n je vlastně kartézským součinem $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}$
- Nulový vektor je určen jednoznačně (je ve $V(U)$ jediný)
- Opačný vektor k vektoru \mathbf{x} značíme $-\mathbf{x}$ a je také určen jednoznačně.
- Pro každý vektor \mathbf{x} platí: $-(-\mathbf{x})=\mathbf{x}$; $-\mathbf{x}=(-1).\mathbf{x}$
- Pro každý vektor \mathbf{x} je $0.\mathbf{x}=\mathbf{0}$; podobně pro každý skalár r je $r.\mathbf{0}=\mathbf{0}$
- Z rovnice $r.\mathbf{x}=\mathbf{0}$ vyplývá, že buď $r=0$ nebo $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

I.3. Vektorový prostor: Příklady:

I.3. Vektorový prostor: Příklady:

- Vektorový prostor může být tvořen pouze jediným prvkem: **0**

I.3. Vektorový prostor: Příklady:

- Vektorový prostor může být tvořen pouze jediným prvkem: $\mathbf{0}$ (je to tzv. nulový (triviální) vektorový prostor)

I.3. Vektorový prostor: Příklady:

- Vektorový prostor může být tvořen pouze jediným prvkem: $\mathbf{0}$ (je to tzv. nulový (triviální) vektorový prostor)
- Množina všech reálných čísel \mathbf{R}

I.3. Vektorový prostor: Příklady:

- Vektorový prostor může být tvořen pouze jediným prvkem: $\mathbf{0}$ (je to tzv. nulový (triviální) vektorový prostor)
- Množina všech reálných čísel \mathbf{R}
- Množina všech komplexních čísel \mathbf{C}

I.3. Vektorový prostor: Příklady:

- Vektorový prostor může být tvořen pouze jediným prvkem: $\mathbf{0}$ (je to tzv. nulový (triviální) vektorový prostor)
- Množina všech reálných čísel \mathbf{R}
- Množina všech komplexních čísel \mathbf{C}
- Množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel \mathbf{R}^n

I.3. Vektorový prostor: Příklady:

- Vektorový prostor může být tvořen pouze jediným prvkem: $\mathbf{0}$ (je to tzv. nulový (triviální) vektorový prostor)
- Množina všech reálných čísel \mathbf{R}
- Množina všech komplexních čísel \mathbf{C}
- Množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel \mathbf{R}^n
- Množina všech uspořádaných n -tic komplexních čísel \mathbf{C}^n

I.3. Vektorový prostor: Příklady:

- Vektorový prostor může být tvořen pouze jediným prvkem: $\mathbf{0}$ (je to tzv. nulový (triviální) vektorový prostor)
- Množina všech reálných čísel \mathbf{R}
- Množina všech komplexních čísel \mathbf{C}
- Množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel \mathbf{R}^n
- Množina všech uspořádaných n -tic komplexních čísel \mathbf{C}^n
- Množina všech reálných mnohočlenů (polynomů)

I.3. Vektorový prostor: Příklady:

- Vektorový prostor může být tvořen pouze jediným prvkem: $\mathbf{0}$ (je to tzv. nulový (triviální) vektorový prostor)
- Množina všech reálných čísel \mathbf{R}
- Množina všech komplexních čísel \mathbf{C}
- Množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel \mathbf{R}^n
- Množina všech uspořádaných n -tic komplexních čísel \mathbf{C}^n
- Množina všech reálných mnohočlenů (polynomů)
- Množina všech mnohočlenů stupně nejvýše p

I.3. Vektorový prostor: Příklady:

- Vektorový prostor může být tvořen pouze jediným prvkem: $\mathbf{0}$ (je to tzv. nulový (triviální) vektorový prostor)
- Množina všech reálných čísel \mathbf{R}
- Množina všech komplexních čísel \mathbf{C}
- Množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel \mathbf{R}^n
- Množina všech uspořádaných n -tic komplexních čísel \mathbf{C}^n
- Množina všech reálných mnohočlenů (polynomů)
- Množina všech mnohočlenů stupně nejvýše p
- Množina všech matic typu $m \times n$

I.3. Vektorový prostor: Příklady:

- Vektorový prostor může být tvořen pouze jediným prvkem: $\mathbf{0}$ (je to tzv. nulový (triviální) vektorový prostor)
- Množina všech reálných čísel \mathbf{R}
- Množina všech komplexních čísel \mathbf{C}
- Množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel \mathbf{R}^n
- Množina všech uspořádaných n -tic komplexních čísel \mathbf{C}^n
- Množina všech reálných mnohočlenů (polynomů)
- Množina všech mnohočlenů stupně nejvýše p
- Množina všech matic typu $m \times n$
- Množina všech reálných funkcí definovaných na intervalu $\langle a, b \rangle$

I.3. Vektorový prostor: Příklady:

- Vektorový prostor může být tvořen pouze jediným prvkem: $\mathbf{0}$ (je to tzv. nulový (triviální) vektorový prostor)
- Množina všech reálných čísel \mathbf{R}
- Množina všech komplexních čísel \mathbf{C}
- Množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel \mathbf{R}^n
- Množina všech uspořádaných n -tic komplexních čísel \mathbf{C}^n
- Množina všech reálných mnohočlenů (polynomů)
- Množina všech mnohočlenů stupně nejvýše p
- Množina všech matic typu $m \times n$
- Množina všech reálných funkcí definovaných na intervalu $\langle a, b \rangle$
- Množina všech spojitých funkcí definovaných na intervalu $\langle a, b \rangle$

I.3. Vektorový prostor: Eukleidovský prostor:

n- rozměrný Eukleidovský vektorový prostor $V(E_n)$ je vektorový prostor, jehož nosičem je \mathbf{R}^n , na němž jsou definovány obvyklé operace sčítání a násobení skalárem a navíc je definována tzv. Eukleidovská vzdálenost $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dvou vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, definovaná takto:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

I.3. Vektorový prostor: Eukleidovský prostor:

n- rozměrný Eukleidovský vektorový prostor $V(E_n)$ je vektorový prostor, jehož nosičem je \mathbf{R}^n , na němž jsou definovány obvyklé operace sčítání a násobení skalárem a navíc je definována tzv. Eukleidovská vzdálenost $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dvou vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, definovaná takto:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

- Vektorový prostor $V(E_n)$ se často označuje pouze zkráceně symbolem E_n

I.3. Vektorový prostor: Eukleidovský prostor:

n- rozměrný Eukleidovský vektorový prostor $V(E_n)$ je vektorový prostor, jehož nosičem je \mathbf{R}^n , na němž jsou definovány obvyklé operace sčítání a násobení skalárem a navíc je definována tzv. Eukleidovská vzdálenost $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dvou vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, definovaná takto:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

- Vektorový prostor $V(E_n)$ se často označuje pouze zkráceně symbolem E_n
- Prostor E_n pro $n=1, 2, 3$ také někdy nazýváme geometrickým prostorem

I.3. Vektorový prostor: Eukleidovský prostor:

n- rozměrný Eukleidovský vektorový prostor $V(E_n)$ je vektorový prostor, jehož nosičem je \mathbf{R}^n , na němž jsou definovány obvyklé operace sčítání a násobení skalárem a navíc je definována tzv. Eukleidovská vzdálenost $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dvou vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, definovaná takto:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

- Vektorový prostor $V(E_n)$ se často označuje pouze zkráceně symbolem E_n
- Prostor E_n pro $n=1, 2, 3$ také někdy nazýváme geometrickým prostorem
- Eukleidovská vzdálenost vektorů definuje tzv. Eukleidovskou normu vektoru \mathbf{x} , což je jeho vzdálenost od nulového vektoru $\mathbf{0}$. Tuto normu značíme $\|\mathbf{x}\|$ a je

I.3. Vektorový prostor: Eukleidovský prostor:

n- rozměrný Eukleidovský vektorový prostor $V(E_n)$ je vektorový prostor, jehož nosičem je \mathbf{R}^n , na němž jsou definovány obvyklé operace sčítání a násobení skalárem a navíc je definována tzv. Eukleidovská vzdálenost $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dvou vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, definovaná takto:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

- Vektorový prostor $V(E_n)$ se často označuje pouze zkráceně symbolem E_n
- Prostor E_n pro $n=1, 2, 3$ také někdy nazýváme geometrickým prostorem
- Eukleidovská vzdálenost vektorů definuje tzv. Eukleidovskou normu vektoru \mathbf{x} , což je jeho vzdálenost od nulového vektoru $\mathbf{0}$. Tuto normu značíme $\|\mathbf{x}\|$ a je

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

I.3. Vektorový prostor: Eukleidovský prostor:

skalární součin vektorů \mathbf{x}, \mathbf{y} v E_n je číslo (skalár)

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

I.3. Vektorový prostor: Eukleidovský prostor:

skalární součin vektorů \mathbf{x}, \mathbf{y} v E_n je číslo (skalár)

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

- V E_3 s pro skalární součin platí rovnost

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos(\varphi)$$

kde φ je úhel, který svírají geometrické vektory \mathbf{x} a \mathbf{y} .

I.3. Vektorový prostor: Eukleidovský prostor:

skalární součin vektorů \mathbf{x}, \mathbf{y} v E_n je číslo (skalár)

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

- V E_3 s pro skalární součin platí rovnost

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos(\varphi)$$

kde φ je úhel, který svírají geometrické vektory \mathbf{x} a \mathbf{y} .

- Odtud lze spočítat úhel φ jako

$$\cos(\varphi) = \frac{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}$$

I.3. Vektorový prostor: Eukleidovský prostor:

skalární součin vektorů \mathbf{x}, \mathbf{y} v E_n je číslo (skalár)

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

- V E_3 s pro skalární součin platí rovnost

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos(\varphi)$$

kde φ je úhel, který svírají geometrické vektory \mathbf{x} a \mathbf{y} .

- Odtud lze spočítat úhel φ jako

$$\cos(\varphi) = \frac{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}$$

- Nulovost skalárního součinu je kritériem "kolmosti":

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$$

I.4. Dimenze a báze vektorového prostoru

Definice: *Báze* vektorového prostoru V je největší množina lineárně nezávislých vektorů tohoto prostoru. Počet vektorů báze nazýváme *dimenzí* vektorového prostoru V .

I.4. Dimenze a báze vektorového prostoru

Definice: *Báze* vektorového prostoru V je největší množina lineárně nezávislých vektorů tohoto prostoru. Počet vektorů báze nazýváme *dimenzí* vektorového prostoru V .

Věta: Je-li a_1, a_2, \dots, a_n báze vektorového prostoru V dimenze n , potom pro každý vektor u , který je z prostoru V a není prvkem báze platí, že jej lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze a to právě jediným způsobem (tedy *jednoznačně*).

I.4. Dimenze a báze vektorového prostoru

Definice: *Báze* vektorového prostoru V je největší množina lineárně nezávislých vektorů tohoto prostoru. Počet vektorů báze nazýváme *dimenzí* vektorového prostoru V .

Věta: Je-li a_1, a_2, \dots, a_n báze vektorového prostoru V dimenze n , potom pro každý vektor u , který je z prostoru V a není prvkem báze platí, že jej lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze a to právě jediným způsobem (tedy *jednoznačně*).

Koeficienty ve vyjádření vektoru u pomocí báze a_1, a_2, \dots, a_n nazýváme *souřadnicemi* vektoru u vzhledem k bázi a_1, a_2, \dots, a_n .

I.4. Dimenze a báze vektorového prostoru

Definice: *Báze* vektorového prostoru V je největší množina lineárně nezávislých vektorů tohoto prostoru. Počet vektorů báze nazýváme *dimenzí* vektorového prostoru V .

Věta: Je-li a_1, a_2, \dots, a_n báze vektorového prostoru V dimenze n , potom pro každý vektor u , který je z prostoru V a není prvkem báze platí, že jej lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze a to právě jediným způsobem (tedy *jednoznačně*).

Koeficienty ve vyjádření vektoru u pomocí báze a_1, a_2, \dots, a_n nazýváme *souřadnicemi* vektoru u vzhledem k bázi a_1, a_2, \dots, a_n .

Báze vektorového prostoru V dimenze n není určena jednoznačně!
To znamená, že v každém vektorovém prostoru kromě triviálního můžeme nalézt nekonečně mnoho různých bází. Všechny však mají stejný počet členů rovný dimenzi tohoto prostoru n .

I.4. Podprostor

Definice: Je-li V vektorový prostor a U je jeho podmnožina pro kterou platí

- pro libovolná $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ je $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$
- pro libovolné $\mathbf{a} \in U$ a $r \in \mathbf{R}$ je $r \cdot \mathbf{a} \in U$

potom U nazýváme podprostorem vektorového prostoru V .

I.4. Podprostor

Definice: Je-li V vektorový prostor a U je jeho podmnožina pro kterou platí

- pro libovolná $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ je $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$
- pro libovolné $\mathbf{a} \in U$ a $r \in \mathbf{R}$ je $r \cdot \mathbf{a} \in U$

potom U nazýváme podprostorem vektorového prostoru V .

Věta: Je-li $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ skupina vektorů z vektorového prostoru V dimenze n a je $k < n$, potom všechny lineární kombinace vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ tvoří podprostor dimenze k prostoru V (tzv. *lineární obal*).

I.4. Podprostor

Definice: Je-li V vektorový prostor a U je jeho podmnožina pro kterou platí

- pro libovolná $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ je $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$
- pro libovolné $\mathbf{a} \in U$ a $r \in \mathbf{R}$ je $r \cdot \mathbf{a} \in U$

potom U nazýváme podprostorem vektorového prostoru V .

Věta: Je-li $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ skupina vektorů z vektorového prostoru V dimenze n a je $k < n$, potom všechny lineární kombinace vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ tvoří podprostor dimenze k prostoru V (tzv. *lineární obal*).

Příklady:

I.4. Podprostor

Definice: Je-li V vektorový prostor a U je jeho podmnožina pro kterou platí

- pro libovolná $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ je $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$
- pro libovolné $\mathbf{a} \in U$ a $r \in \mathbf{R}$ je $r \cdot \mathbf{a} \in U$

potom U nazýváme podprostorem vektorového prostoru V .

Věta: Je-li $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ skupina vektorů z vektorového prostoru V dimenze n a je $k < n$, potom všechny lineární kombinace vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ tvoří podprostor dimenze k prostoru V (tzv. *lineární obal*).

Příklady:

1) $P = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{u} = (x, 2x), x \in \mathbf{R}\}$

I.4. Podprostor

Definice: Je-li V vektorový prostor a U je jeho podmnožina pro kterou platí

- pro libovolná $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ je $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$
- pro libovolné $\mathbf{a} \in U$ a $r \in \mathbf{R}$ je $r \cdot \mathbf{a} \in U$

potom U nazýváme podprostorem vektorového prostoru V .

Věta: Je-li $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ skupina vektorů z vektorového prostoru V dimenze n a je $k < n$, potom všechny lineární kombinace vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ tvoří podprostor dimenze k prostoru V (tzv. *lineární obal*).

Příklady:

1) $P = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{u} = (x, 2x), x \in \mathbf{R}\}$

2) $Q = \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v} = (x, y, 0), x, y \in \mathbf{R}\}$

I.4. Podprostor

Definice: Je-li V vektorový prostor a U je jeho podmnožina pro kterou platí

- pro libovolná $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ je $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$
- pro libovolné $\mathbf{a} \in U$ a $r \in \mathbf{R}$ je $r \cdot \mathbf{a} \in U$

potom U nazýváme podprostorem vektorového prostoru V .

Věta: Je-li $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ skupina vektorů z vektorového prostoru V dimenze n a je $k < n$, potom všechny lineární kombinace vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ tvoří podprostor dimenze k prostoru V (tzv. *lineární obal*).

Příklady:

1) $P = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{u} = (x, 2x), x \in \mathbf{R}\}$

2) $Q = \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v} = (x, y, 0), x, y \in \mathbf{R}\}$

3) $W = \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v} = (x, y, 1), x, y \in \mathbf{R}\}$

I.4. Podprostor

Definice: Je-li V vektorový prostor a U je jeho podmnožina pro kterou platí

- pro libovolná $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ je $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$
- pro libovolné $\mathbf{a} \in U$ a $r \in \mathbf{R}$ je $r \cdot \mathbf{a} \in U$

potom U nazýváme podprostorem vektorového prostoru V .

Věta: Je-li $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ skupina vektorů z vektorového prostoru V dimenze n a je $k < n$, potom všechny lineární kombinace vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ tvoří podprostor dimenze k prostoru V (tzv. *lineární obal*).

Příklady:

1) $P = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{u} = (x, 2x), x \in \mathbf{R} \}$

2) $Q = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v} = (x, y, 0), x, y \in \mathbf{R} \}$

3) $W = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v} = (x, y, 1), x, y \in \mathbf{R} \}$

4) $Q = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v} = (x, 2x, 3x), x \in \mathbf{R} \}$

I.4. Podprostor

Definice: Je-li V vektorový prostor a U je jeho podmnožina pro kterou platí

- pro libovolná $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ je $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$
- pro libovolné $\mathbf{a} \in U$ a $r \in \mathbf{R}$ je $r \cdot \mathbf{a} \in U$

potom U nazýváme podprostorem vektorového prostoru V .

Věta: Je-li $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ skupina vektorů z vektorového prostoru V dimenze n a je $k < n$, potom všechny lineární kombinace vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ tvoří podprostor dimenze k prostoru V (tzv. *lineární obal*).

Příklady:

1) $P = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{u} = (x, 2x), x \in \mathbf{R} \}$

2) $Q = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v} = (x, y, 0), x, y \in \mathbf{R} \}$

3) $W = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v} = (x, y, 1), x, y \in \mathbf{R} \}$

4) $Q = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v} = (x, 2x, 3x), x \in \mathbf{R} \}$

5) $Z = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v} = (x, y, 2x - 3y), x, y \in \mathbf{R} \}$

I.4. Podprostor

Definice: Je-li V vektorový prostor a U je jeho podmnožina pro kterou platí

- pro libovolná $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ je $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$
- pro libovolné $\mathbf{a} \in U$ a $r \in \mathbf{R}$ je $r \cdot \mathbf{a} \in U$

potom U nazýváme podprostorem vektorového prostoru V .

Věta: Je-li $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ skupina vektorů z vektorového prostoru V dimenze n a je $k < n$, potom všechny lineární kombinace vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ tvoří podprostor dimenze k prostoru V (tzv. *lineární obal*).

Příklady:

$$1) P = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{u} = (x, 2x), x \in \mathbf{R} \}$$

$$2) Q = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v} = (x, y, 0), x, y \in \mathbf{R} \}$$

$$3) W = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v} = (x, y, 1), x, y \in \mathbf{R} \}$$

$$4) Q = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v} = (x, 2x, 3x), x \in \mathbf{R} \}$$

$$5) Z = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v} = (x, y, 2x - 3y), x, y \in \mathbf{R} \}$$

$$6) S = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{v} = (x, y, 2x + 3y - 1), x, y \in \mathbf{R} \}$$

I.4. Příklady

Příklady:

I.4. Příklady

Příklady:

- 7) Která z následujících skupin vektorů může tvořit bázi (pod)prostoru?
- a) $\mathbf{q} = (1,0,0)$, $\mathbf{u} = (2,1,3)$, $\mathbf{v} = (0,-1,1)$, $\mathbf{w} = (3,0,-2)$

I.4. Příklady

Příklady:

7) Která z následujících skupin vektorů může tvořit bázi (pod)prostoru?

a) $\mathbf{q} = (1,0,0)$, $\mathbf{u} = (2,1,3)$, $\mathbf{v} = (0,-1,1)$, $\mathbf{w} = (3,0,-2)$

b) $\mathbf{a} = (3,2)$, $\mathbf{b} = (1,-1)$

I.4. Příklady

Příklady:

7) Která z následujících skupin vektorů může tvořit bázi (pod)prostoru?

a) $\mathbf{q} = (1,0,0)$, $\mathbf{u} = (2,1,3)$, $\mathbf{v} = (0,-1,1)$, $\mathbf{w} = (3,0,-2)$

b) $\mathbf{a} = (3,2)$, $\mathbf{b} = (1,-1)$

c) $\mathbf{r} = (1,0,2,0)$, $\mathbf{s} = (4,1,0,1)$, $\mathbf{t} = (0,2,-1,2)$

I.4. Příklady

Příklady:

7) Která z následujících skupin vektorů může tvořit bázi (pod)prostoru?

a) $\mathbf{q} = (1,0,0)$, $\mathbf{u} = (2,1,3)$, $\mathbf{v} = (0,-1,1)$, $\mathbf{w} = (3,0,-2)$

b) $\mathbf{a} = (3,2)$, $\mathbf{b} = (1,-1)$

c) $\mathbf{r} = (1,0,2,0)$, $\mathbf{s} = (4,1,0,1)$, $\mathbf{t} = (0,2,-1,2)$

d) $\mathbf{k} = (1,2,3)$, $\mathbf{l} = (2,-1,0)$, $\mathbf{m} = (-1,3,3)$

I.4. Příklady

Příklady:

7) Která z následujících skupin vektorů může tvořit bázi (pod)prostoru?

a) $\mathbf{q} = (1,0,0)$, $\mathbf{u} = (2,1,3)$, $\mathbf{v} = (0,-1,1)$, $\mathbf{w} = (3,0,-2)$

b) $\mathbf{a} = (3,2)$, $\mathbf{b} = (1,-1)$

c) $\mathbf{r} = (1,0,2,0)$, $\mathbf{s} = (4,1,0,1)$, $\mathbf{t} = (0,2,-1,2)$

d) $\mathbf{k} = (1,2,3)$, $\mathbf{l} = (2,-1,0)$, $\mathbf{m} = (-1,3,3)$

e) $\mathbf{x} = (1,0,2)$, $\mathbf{y} = (2,1,0)$, $\mathbf{z} = (0,1,1)$

I.4. Příklady

Příklady:

- 7) Která z následujících skupin vektorů může tvořit bázi (pod)prostoru?
- a) $\mathbf{q} = (1,0,0)$, $\mathbf{u} = (2,1,3)$, $\mathbf{v} = (0,-1,1)$, $\mathbf{w} = (3,0,-2)$
 - b) $\mathbf{a} = (3,2)$, $\mathbf{b} = (1,-1)$
 - c) $\mathbf{r} = (1,0,2,0)$, $\mathbf{s} = (4,1,0,1)$, $\mathbf{t} = (0,2,-1,2)$
 - d) $\mathbf{k} = (1,2,3)$, $\mathbf{l} = (2,-1,0)$, $\mathbf{m} = (-1,3,3)$
 - e) $\mathbf{x} = (1,0,2)$, $\mathbf{y} = (2,1,0)$, $\mathbf{z} = (0,1,1)$
- 8) a) Najděte souřadnice vektoru \mathbf{q} vzhledem k bázi \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} .

I.4. Příklady

Příklady:

- 7) Která z následujících skupin vektorů může tvořit bázi (pod)prostoru?
- a) $\mathbf{q} = (1,0,0)$, $\mathbf{u} = (2,1,3)$, $\mathbf{v} = (0,-1,1)$, $\mathbf{w} = (3,0,-2)$
 - b) $\mathbf{a} = (3,2)$, $\mathbf{b} = (1,-1)$
 - c) $\mathbf{r} = (1,0,2,0)$, $\mathbf{s} = (4,1,0,1)$, $\mathbf{t} = (0,2,-1,2)$
 - d) $\mathbf{k} = (1,2,3)$, $\mathbf{l} = (2,-1,0)$, $\mathbf{m} = (-1,3,3)$
 - e) $\mathbf{x} = (1,0,2)$, $\mathbf{y} = (2,1,0)$, $\mathbf{z} = (0,1,1)$
- 8) a) Najděte souřadnice vektoru \mathbf{q} vzhledem k bázi $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.
b) Jaké jsou souřadnice vektoru \mathbf{q} vzhledem k bázi $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$?

I.4. Příklady

Příklady:

- 7) Která z následujících skupin vektorů může tvořit bázi (pod)prostoru?
- a) $\mathbf{q} = (1,0,0)$, $\mathbf{u} = (2,1,3)$, $\mathbf{v} = (0,-1,1)$, $\mathbf{w} = (3,0,-2)$
 - b) $\mathbf{a} = (3,2)$, $\mathbf{b} = (1,-1)$
 - c) $\mathbf{r} = (1,0,2,0)$, $\mathbf{s} = (4,1,0,1)$, $\mathbf{t} = (0,2,-1,2)$
 - d) $\mathbf{k} = (1,2,3)$, $\mathbf{l} = (2,-1,0)$, $\mathbf{m} = (-1,3,3)$
 - e) $\mathbf{x} = (1,0,2)$, $\mathbf{y} = (2,1,0)$, $\mathbf{z} = (0,1,1)$
- 8) a) Najděte souřadnice vektoru \mathbf{q} vzhledem k bázi $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.
b) Jaké jsou souřadnice vektoru \mathbf{q} vzhledem k bázi $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$?
- 9) Lze rovinu $3x + 2y - z + 1 = 0$ považovat za obraz podprostoru E_3 ?

I.4. Příklady

Příklady:

- 7) Která z následujících skupin vektorů může tvořit bázi (pod)prostoru?
- a) $\mathbf{q} = (1,0,0)$, $\mathbf{u} = (2,1,3)$, $\mathbf{v} = (0,-1,1)$, $\mathbf{w} = (3,0,-2)$
 - b) $\mathbf{a} = (3,2)$, $\mathbf{b} = (1,-1)$
 - c) $\mathbf{r} = (1,0,2,0)$, $\mathbf{s} = (4,1,0,1)$, $\mathbf{t} = (0,2,-1,2)$
 - d) $\mathbf{k} = (1,2,3)$, $\mathbf{l} = (2,-1,0)$, $\mathbf{m} = (-1,3,3)$
 - e) $\mathbf{x} = (1,0,2)$, $\mathbf{y} = (2,1,0)$, $\mathbf{z} = (0,1,1)$
- 8) a) Najděte souřadnice vektoru \mathbf{q} vzhledem k bázi $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.
b) Jaké jsou souřadnice vektoru \mathbf{q} vzhledem k bázi $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$?
- 9) Lze rovinu $3x + 2y - z + 1 = 0$ považovat za obraz podprostoru E_3 ?
- 10) Lze považovat rovinu $3x + 2y - z = 0$ za obraz podprostoru E_3 ?

I.4. Příklady

Příklady:

- 7) Která z následujících skupin vektorů může tvořit bázi (pod)prostoru?
- a) $\mathbf{q} = (1,0,0)$, $\mathbf{u} = (2,1,3)$, $\mathbf{v} = (0,-1,1)$, $\mathbf{w} = (3,0,-2)$
 - b) $\mathbf{a} = (3,2)$, $\mathbf{b} = (1,-1)$
 - c) $\mathbf{r} = (1,0,2,0)$, $\mathbf{s} = (4,1,0,1)$, $\mathbf{t} = (0,2,-1,2)$
 - d) $\mathbf{k} = (1,2,3)$, $\mathbf{l} = (2,-1,0)$, $\mathbf{m} = (-1,3,3)$
 - e) $\mathbf{x} = (1,0,2)$, $\mathbf{y} = (2,1,0)$, $\mathbf{z} = (0,1,1)$
- 8) a) Najděte souřadnice vektoru \mathbf{q} vzhledem k bázi \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} .
b) Jaké jsou souřadnice vektoru \mathbf{q} vzhledem k bázi \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} ?
- 9) Lze rovinu $3x + 2y - z + 1 = 0$ považovat za obraz podprostoru E_3 ?
- 10) Lze považovat rovinu $3x + 2y - z = 0$ za obraz podprostoru E_3 ?
Najděte alespoň dvě různé báze tohoto podprostoru.

I.5. Matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

I.5. Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \right\} m = \text{počet řádků,} \\ \text{(řádkové vektory)}$$

I.5. Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m =$ počet řádků,
(řádkové vektory)

$n =$ počet sloupců, sloupcové vektory

I.5. Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m =$ počet řádků,
(řádkové vektory)

$n =$ počet sloupců, sloupcové vektory

- A je matice typu $m \times n$

I.5. Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m =$ počet řádků,
(řádkové vektory)

$n =$ počet sloupců, sloupcové vektory

- A je matice typu $m \times n$
- je-li $m=n$ matice se nazývá *čtvercová* ; jinak je *obdélníková*

I.5. Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m =$ počet řádků,
(řádkové vektory)

$n =$ počet sloupců, sloupcové vektory

- A je matice typu $m \times n$
- je-li $m=n$ matice se nazývá *čtvercová* ; jinak je *obdélníková*
- prvky $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ tvoří *hlavní diagonálu* matice A

I.5. Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m =$ počet řádků,
(řádkové vektory)

$n =$ počet sloupců, sloupcové vektory

- A je matice typu $m \times n$
- je-li $m=n$ matice se nazývá *čtvercová* ; jinak je *obdélníková*
- prvky $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ tvoří *hlavní diagonálu* matice A

I.5. Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m =$ počet řádků,
(řádkové vektory)

$n =$ počet sloupců, sloupcové vektory

- A je matice typu $m \times n$
- je-li $m=n$ matice se nazývá *čtvercová* ; jinak je *obdélníková*
- prvky $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ tvoří *hlavní diagonálu* matice A

příklady matic:

I.5. Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m =$ počet řádků,
(řádkové vektory)

$n =$ počet sloupců, sloupcové vektory

- A je matice typu $m \times n$
- je-li $m=n$ matice se nazývá *čtvercová* ; jinak je *obdélníková*
- prvky $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ tvoří *hlavní diagonálu* matice A

příklady matic:

$$B = \begin{pmatrix} 8, & -1, & 5, & 15, & -7, & 2 \\ 0, & 3, & -11, & 5, & -12, & 24 \\ -4, & 8, & 0, & 7, & -3, & 0 \end{pmatrix}$$

I.5. Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m =$ počet řádků,
(řádkové vektory)

$n =$ počet sloupců, sloupcové vektory

- A je matice typu $m \times n$
- je-li $m=n$ matice se nazývá *čtvercová* ; jinak je *obdélníková*
- prvky $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ tvoří *hlavní diagonálu* matice A

příklady matic:

$$B = \begin{pmatrix} 8, & -1, & 5, & 15, & -7, & 2 \\ 0, & 3, & -11, & 5, & -12, & 24 \\ -4, & 8, & 0, & 7, & -3, & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1, & 4, \\ 2, & 0, \\ 3, & 5, \\ -2, & 8, \\ 4, & 0, \end{pmatrix}$$

I.5. Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m = \text{počet řádků, (řádkové vektory)}$
 $n = \text{počet sloupců, sloupcové vektory}$

- A je matice typu $m \times n$
- je-li $m=n$ matice se nazývá *čtvercová* ; jinak je *obdélníková*
- prvky $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ tvoří *hlavní diagonálu* matice A

příklady matic:

$$B = \begin{pmatrix} 8, & -1, & 5, & 15, & -7, & 2 \\ 0, & 3, & -11, & 5, & -12, & 24 \\ -4, & 8, & 0, & 7, & -3, & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1, & 4, \\ 2, & 0, \\ 3, & 5, \\ -2, & 8, \\ 4, & 0, \end{pmatrix} \quad D = (1, 4, 2, 0, 3)$$

I.5. Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m =$ počet řádků,
 (řádkové vektory)

$n =$ počet sloupců, sloupcové vektory

- A je matice typu $m \times n$
- je-li $m=n$ matice se nazývá *čtvercová* ; jinak je *obdélníková*
- prvky $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ tvoří *hlavní diagonálu* matice A

příklady matic:

$$B = \begin{pmatrix} 8, & -1, & 5, & 15, & -7, & 2 \\ 0, & 3, & -11, & 5, & -12, & 24 \\ -4, & 8, & 0, & 7, & -3, & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1, & 4, \\ 2, & 0, \\ 3, & 5, \\ -2, & 8, \\ 4, & 0, \end{pmatrix} \quad D = (1, 4, 2, 0, 3)$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

I.5. Matice, příklady

$$F = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ 0, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

I.5. Matice, příklady

$$F = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ 0, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

horní
trojúhelníková

$$F = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 0, & 3, & 5 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

I.5. Matice, příklady

$$F = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ 0, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

horní
trojúhelníková

$$F = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 0, & 3, & 5 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} a_{11}, & 0, & \cdots & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

I.5. Matice, příklady

$$F = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ 0, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

horní
trojúhelníková

$$F = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 0, & 3, & 5 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} a_{11}, & 0, & \cdots & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dolní
trojúhelníková

$$G = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 1, & 3, & 0 \\ 0, & 5, & 1 \end{pmatrix}$$

I.5. Matice, příklady

$$F = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ 0, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

horní
trojúhelníková

$$F = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 0, & 3, & 5 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} a_{11}, & 0, & \cdots & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dolní
trojúhelníková

$$G = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 1, & 3, & 0 \\ 0, & 5, & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} a_{11}, & 0, & \cdots & 0 \\ 0, & a_{22}, & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

I.5. Matice, příklady

$$F = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ 0, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

horní
trojúhelníková

$$F = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 0, & 3, & 5 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} a_{11}, & 0, & \cdots & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dolní
trojúhelníková

$$G = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 1, & 3, & 0 \\ 0, & 5, & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} a_{11}, & 0, & \cdots & 0 \\ 0, & a_{22}, & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

diagonální

$$H = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 3, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

I.5. Matice, příklady

$$F = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ 0, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

horní
trojúhelníková

$$F = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 0, & 3, & 5 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} a_{11}, & 0, & \cdots & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dolní
trojúhelníková

$$G = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 1, & 3, & 0 \\ 0, & 5, & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} a_{11}, & 0, & \cdots & 0 \\ 0, & a_{22}, & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

diagonální

$$H = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 3, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{21}, & \cdots & a_{m1} \\ a_{12}, & a_{22}, & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}, & a_{2n}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

I.5. Matice, příklady

$$F = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ 0, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

horní
trojúhelníková

$$F = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 0, & 3, & 5 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} a_{11}, & 0, & \cdots & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dolní
trojúhelníková

$$G = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 1, & 3, & 0 \\ 0, & 5, & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} a_{11}, & 0, & \cdots & 0 \\ 0, & a_{22}, & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

diagonální

$$H = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 3, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{21}, & \cdots & a_{m1} \\ a_{12}, & a_{22}, & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}, & a_{2n}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

transponovaná
 $J = A^T, J = A'$

$$F = G^T$$

I.5. Matice, operace

Rovnost: $A = B \Leftrightarrow$ jsou stejného typu $m \times n$ a platí $\forall i, j: a_{ij} = b_{ij}$

I.5. Matice, operace

Rovnost: $A = B \Leftrightarrow$ jsou stejného typu $m \times n$ a platí $\forall i, j: a_{ij} = b_{ij}$

Sčítání: $C = A + B \Leftrightarrow$ A a B jsou stejného typu a platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

I.5. Matice, operace

Rovnost: $A = B \Leftrightarrow$ jsou stejného typu $m \times n$ a platí $\forall i,j: a_{ij} = b_{ij}$

Sčítání: $C = A+B \Leftrightarrow$ A a B jsou stejného typu a platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Násobení číslem: $D = k.A \Leftrightarrow \forall i,j: d_{ij} = k.a_{ij}$

I.5. Matice, operace

Rovnost: $A = B \iff$ jsou stejného typu $m \times n$ a platí $\forall i,j: a_{ij} = b_{ij}$

Sčítání: $C = A + B \iff$ A a B jsou stejného typu a platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Násobení číslem: $D = k.A \iff \forall i,j: d_{ij} = k.a_{ij}$

Matice stejného typu $m \times n$ tvoří vektorový prostor. Platí totiž:

I.5. Matice, operace

Rovnost: $A = B \Leftrightarrow$ jsou stejného typu $m \times n$ a platí $\forall i,j: a_{ij} = b_{ij}$

Sčítání: $C = A + B \Leftrightarrow$ A a B jsou stejného typu a platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Násobení číslem: $D = k.A \Leftrightarrow \forall i,j: d_{ij} = k.a_{ij}$

Matice stejného typu $m \times n$ tvoří vektorový prostor. Platí totiž:

a) existuje nulová matice $O: \forall i=1, \dots, m, j=1, \dots, n : o_{ij} = 0$

I.5. Matice, operace

Rovnost: $A = B \Leftrightarrow$ jsou stejného typu $m \times n$ a platí $\forall i,j: a_{ij} = b_{ij}$

Sčítání: $C = A+B \Leftrightarrow$ A a B jsou stejného typu a platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Násobení číslem: $D = k.A \Leftrightarrow \forall i,j: d_{ij} = k.a_{ij}$

Matice stejného typu $m \times n$ tvoří vektorový prostor. Platí totiž:

a) existuje nulová matice $O: \forall i=1, \dots, m, j=1, \dots, n : o_{ij} = 0$

b) platí $A + B = B + A$

I.5. Matice, operace

Rovnost: $A = B \iff$ jsou stejného typu $m \times n$ a platí $\forall i,j: a_{ij} = b_{ij}$

Sčítání: $C = A + B \iff$ A a B jsou stejného typu a platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Násobení číslem: $D = k.A \iff \forall i,j: d_{ij} = k.a_{ij}$

Matice stejného typu $m \times n$ tvoří vektorový prostor. Platí totiž:

a) existuje nulová matice $O: \forall i=1, \dots, m, j=1, \dots, n : o_{ij} = 0$

b) platí $A + B = B + A$

c) $A + (B + C) = (A + B) + C$

I.5. Matice, operace

Rovnost: $A = B \iff$ jsou stejného typu $m \times n$ a platí $\forall i,j: a_{ij} = b_{ij}$

Sčítání: $C = A+B \iff$ A a B jsou stejného typu a platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Násobení číslem: $D = k.A \iff \forall i,j: d_{ij} = k.a_{ij}$

Matice stejného typu $m \times n$ tvoří vektorový prostor. Platí totiž:

a) existuje nulová matice $O: \forall i=1, \dots, m, j=1, \dots, n : o_{ij} = 0$

b) platí $A + B = B + A$

c) $A + (B + C) = (A + B) + C$

d) k matici A existuje matice $B = -A$ tak, že $A + B = A - A = O$

I.5. Matice, operace

Rovnost: $A = B \iff$ jsou stejného typu $m \times n$ a platí $\forall i, j: a_{ij} = b_{ij}$

Sčítání: $C = A + B \iff$ A a B jsou stejného typu a platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Násobení číslem: $D = k.A \iff \forall i, j: d_{ij} = k.a_{ij}$

Matice stejného typu $m \times n$ tvoří vektorový prostor. Platí totiž:

a) existuje nulová matice $O: \forall i=1, \dots, m, j=1, \dots, n : o_{ij}=0$

b) platí $A + B = B + A$

c) $A + (B + C) = (A + B) + C$

d) k matici A existuje matice $B = -A$ tak, že $A + B = A - A = O$

e) pro $\alpha \in \mathbf{R}$ platí $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B$

I.5. Matice, operace

Rovnost: $A = B \Leftrightarrow$ jsou stejného typu $m \times n$ a platí $\forall i, j: a_{ij} = b_{ij}$

Sčítání: $C = A + B \Leftrightarrow$ A a B jsou stejného typu a platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Násobení číslem: $D = k.A \Leftrightarrow \forall i, j: d_{ij} = k.a_{ij}$

Matice stejného typu $m \times n$ tvoří vektorový prostor. Platí totiž:

a) existuje nulová matice $O: \forall i=1, \dots, m, j=1, \dots, n : o_{ij}=0$

b) platí $A + B = B + A$

c) $A + (B + C) = (A + B) + C$

d) k matici A existuje matice $B = -A$ tak, že $A + B = A - A = O$

e) pro $\alpha \in \mathbf{R}$ platí $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B$

f) pro $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ platí $(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$

I.5. Matice, operace

Rovnost: $A = B \Leftrightarrow$ jsou stejného typu $m \times n$ a platí $\forall i, j: a_{ij} = b_{ij}$

Sčítání: $C = A + B \Leftrightarrow$ A a B jsou stejného typu a platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Násobení číslem: $D = k.A \Leftrightarrow \forall i, j: d_{ij} = k.a_{ij}$

Matice stejného typu $m \times n$ tvoří vektorový prostor. Platí totiž:

a) existuje nulová matice $O: \forall i=1, \dots, m, j=1, \dots, n : o_{ij}=0$

b) platí $A + B = B + A$

c) $A + (B + C) = (A + B) + C$

d) k matici A existuje matice $B = -A$ tak, že $A + B = A - A = O$

e) pro $\alpha \in \mathbf{R}$ platí $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B$

f) pro $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ platí $(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$

Navíc pro sčítání a transpozici platí

g) $(A + B)^T = A^T + B^T$

I.5. Matice, násobení matic

Násobení matic: $C = A \cdot B \iff$ jsou *zřetězené*, tj. počet sloupců matice A je stejný, jako počet řádků matice B (A je typu $m \times k$ a B je typu $k \times n$) a platí

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^k a_{ir} b_{rj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

I.5. Matice, násobení matic

Násobení matic: $C = A.B \iff$ jsou *zřetězené*, tj. počet sloupců matice A je stejný, jako počet řádků matice B (A je typu $m \times k$ a B je typu $k \times n$) a platí

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^k a_{ir} b_{rj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

Pro násobení matic platí následující vlastnosti (při dodržení zřetězení):

a) $A.(B + C) = A.B + A.C$ (je distributivní)

I.5. Matice, násobení matic

Násobení matic: $C = A.B \iff$ jsou *zřetězené*, tj. počet sloupců matice A je stejný, jako počet řádků matice B (A je typu $m \times k$ a B je typu $k \times n$) a platí

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^k a_{ir} b_{rj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

Pro násobení matic platí následující vlastnosti (při dodržení zřetězení):

- a) $A.(B + C) = A.B + A.C$ (je distributivní)
- b) $(A.B).C = A.(B.C)$ (je asociativní)

I.5. Matice, násobení matic

Násobení matic: $C = A.B \iff$ jsou *zřetězené*, tj. počet sloupců matice A je stejný, jako počet řádků matice B (A je typu $m \times k$ a B je typu $k \times n$) a platí

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^k a_{ir} b_{rj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

Pro násobení matic platí následující vlastnosti (při dodržení zřetězení):

a) $A.(B + C) = A.B + A.C$ (je distributivní)

b) $(A.B).C = A.(B.C)$ (je asociativní)

c) násobení matic není komutativní: $A.B \neq B.A$

I.5. Matice, násobení matic

Násobení matic: $C = A.B \iff$ jsou *zřetězené*, tj. počet sloupců matice A je stejný, jako počet řádků matice B (A je typu $m \times k$ a B je typu $k \times n$) a platí

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^k a_{ir} b_{rj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

Pro násobení matic platí následující vlastnosti (při dodržení zřetězení):

a) $A.(B + C) = A.B + A.C$ (je distributivní)

b) $(A.B).C = A.(B.C)$ (je asociativní)

c) násobení matic není komutativní: $A.B \neq B.A$

d) $(A.B)^T = B^T.A^T$

I.5. Matice, násobení matic

Násobení matic: $C = A.B \iff$ jsou *zřetězené*, tj. počet sloupců matice A je stejný, jako počet řádků matice B (A je typu $m \times k$ a B je typu $k \times n$) a platí

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^k a_{ir} b_{rj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

Pro násobení matic platí následující vlastnosti (při dodržení zřetězení):

a) $A.(B + C) = A.B + A.C$ (je distributivní)

b) $(A.B).C = A.(B.C)$ (je asociativní)

c) násobení matic není komutativní: $A.B \neq B.A$

d) $(A.B)^T = B^T.A^T$

e) existuje jednotková matice

$$I = \begin{pmatrix} 1, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & 1, & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

tak, že platí: $I.A = A.I = A$

I.5. Matice, soustavy algebraických rovnic

$$-x + 3y + 2z = 0$$

$$x - 2y + 3z = 1$$

$$x + y = 3$$

I.5. Matice, soustavy algebraických rovnic

$$-x + 3y + 2z = 0$$

$$x - 2y + 3z = 1$$

$$x + y = 3$$

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

I.5. Matice, soustavy algebraických rovnic

$$-x + 3y + 2z = 0$$

$$x - 2y + 3z = 1$$

$$x + y = 3$$

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 1, & -2, & 3 \\ 1, & 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

I.5. Matice, soustavy algebraických rovnic

$$-x + 3y + 2z = 0$$

$$x - 2y + 3z = 1$$

$$x + y = 3$$

$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 1, & -2, & 3 \\ 1, & 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

I.5. Matice, soustavy algebraických rovnic

$$-x + 3y + 2z = 0$$

$$x - 2y + 3z = 1$$

$$x + y = 3$$

$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 1, & -2, & 3 \\ 1, & 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$


$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

I.5. Matice, soustavy algebraických rovnic

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ x - 2y + 3z &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$


$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 1, & -2, & 3 \\ 1, & 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$


Řešení:

$$-x + 3y + 2z = 0$$

$$y + 5z = 1$$

$$4y + 2z = 3$$

I.5. Matice, soustavy algebraických rovnic

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ x - 2y + 3z &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$


$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 1, & -2, & 3 \\ 1, & 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$


Řešení:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ y + 5z &= 1 \\ 4y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 0, & 1, & 5 \\ 0, & 4, & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_1$$

I.5. Matice, soustavy algebraických rovnic

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ x - 2y + 3z &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$



$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 1, & -2, & 3 \\ 1, & 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$


$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ y + 5z &= 1 \\ 4y + 2z &= 3 \end{aligned}$$


$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 0, & 1, & 5 \\ 0, & 4, & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_1$$

I.5. Matice, soustavy algebraických rovnic

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ x - 2y + 3z &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 1, & -2, & 3 \\ 1, & 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ y + 5z &= 1 \\ 4y + 2z &= 3 \end{aligned}$$


$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 0, & 1, & 5 \\ 0, & 4, & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$


$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_1$$

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ y + 5z &= 1 \\ -18z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 0, & 1, & 5 \\ 0, & 0, & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_2$$

I.5. Matice, soustavy algebraických rovnic

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ x - 2y + 3z &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 1, & -2, & 3 \\ 1, & 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ y + 5z &= 1 \\ 4y + 2z &= 3 \end{aligned}$$



$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 0, & 1, & 5 \\ 0, & 4, & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_1$$

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ y + 5z &= 1 \\ -18z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 0, & 1, & 5 \\ 0, & 0, & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_2$$

$$z = \frac{1}{18}$$

I.5. Matice, soustavy algebraických rovnic

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ x - 2y + 3z &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 1, & -2, & 3 \\ 1, & 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ y + 5z &= 1 \\ 4y + 2z &= 3 \end{aligned}$$



$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 0, & 1, & 5 \\ 0, & 4, & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_1$$

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ y + 5z &= 1 \\ -18z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 0, & 1, & 5 \\ 0, & 0, & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_2$$

$$z = \frac{1}{18} \quad y = 1 - 5z = \frac{13}{18}$$

I.5. Matice, soustavy algebraických rovnic

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ x - 2y + 3z &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 1, & -2, & 3 \\ 1, & 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ y + 5z &= 1 \\ 4y + 2z &= 3 \end{aligned}$$


$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 0, & 1, & 5 \\ 0, & 4, & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_1$$

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ y + 5z &= 1 \\ -18z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 0, & 1, & 5 \\ 0, & 0, & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_2$$

$$z = \frac{1}{18} \quad y = 1 - 5z = \frac{13}{18} \quad x = 3y + 2z = \frac{41}{18}$$

I.5. Matice, ekvivalentní úpravy

Ekvivalentní úpravy matice (nemění řešení odpovídající soustavy rovnic):

I.5. Matice, ekvivalentní úpravy

Ekvivalentní úpravy matice (nemění řešení odpovídající soustavy rovnic):

a) změna pořadí řádků

I.5. Matice, ekvivalentní úpravy

Ekvivalentní úpravy matice (nemění řešení odpovídající soustavy rovnic):

- a) změna pořadí řádků
- b) vynásobení řádku nenulovým číslem

I.5. Matice, ekvivalentní úpravy

Ekvivalentní úpravy matice (nemění řešení odpovídající soustavy rovnic):

- a) změna pořadí řádků
- b) vynásobení řádku nenulovým číslem
- c) přičtení k libovolnému řádku lineární kombinace ostatních řádků

I.5. Matice, ekvivalentní úpravy

Ekvivalentní úpravy matice (nemění řešení odpovídající soustavy rovnic):

- a) změna pořadí řádků
- b) vynásobení řádku nenulovým číslem
- c) přičtení k libovolnému řádku lineární kombinace ostatních řádků
- d) vynechání nulového řádku

I.6. Hodnost matice

Definice: *Hodnost matice* A je číslo $h(A)$, rovné maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců nebo řádků matice.

I.6. Hodnost matice

Definice: *Hodnost matice* A je číslo $h(A)$, rovné maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců nebo řádků matice.

- Je-li A horní trojúhelníková matice typu $m \times n$ jejíž diagonální prvky jsou všechny nenulové, potom $h(A) = \min\{m, n\}$.

I.6. Hodnost matice

Definice: *Hodnost matice* A je číslo $h(A)$, rovné maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců nebo řádků matice.

- Je-li A horní trojúhelníková matice typu $m \times n$ jejíž diagonální prvky jsou všechny nenulové, potom $h(A) = \min\{m, n\}$.
- Ekvivalentní úpravy (na řádcích i na sloupcích) nemění hodnost matice

I.6. Hodnost matice

Definice: *Hodnost matice* A je číslo $h(A)$, rovné maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců nebo řádků matice.

- Je-li A horní trojúhelníková matice typu $m \times n$ jejíž diagonální prvky jsou všechny nenulové, potom $h(A) = \min\{m, n\}$.
- Ekvivalentní úpravy (na řádcích i na sloupcích) nemění hodnost matice



Hodnost matice určíme tak, že ji postupně převedeme ekvivalentními úpravami na trojúhelníkový tvar a spočteme počet nenulových řádků.

I.7. Determinant matice

Uvažujme čtvercovou matici A typu $n \times n$. *Determinantem* matice A nazveme číslo $\det A$ (někdy též označovaný symbolem $|A|$), které dostaneme výpočtem podle následujících pravidel:

- a) je-li $A = (a)$ čtvercová matice typu 1×1 , potom je $\det A = a$
- b) je-li $n > 1$, vybereme libovolný řádek (například i -tý) a položíme

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in},$$

kde A_{ij} je tzv. *algebraický doplněk* prvku a_{ij} v matici A :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}^*$$

kde A_{ij}^* je determinant části matice A , která vznikne vyškrtnutím i -tého řádku a j -tého sloupce

I.7. Determinant matice

Uvažujme čtvercovou matici A typu $n \times n$. *Determinantem* matice A nazveme číslo $\det A$ (někdy též označovaný symbolem $|A|$), které dostaneme výpočtem podle následujících pravidel:

- a) je-li $A = (a)$ čtvercová matice typu 1×1 , potom je $\det A = a$
b) je-li $n > 1$, vybereme libovolný řádek (například i -tý) a položíme

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in},$$

kde A_{ij} je tzv. *algebraický doplněk* prvku a_{ij} v matici A :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}^*$$

kde A_{ij}^* je determinant části matice A , která vznikne vyškrtnutím i -tého řádku a j -tého sloupce

- bod b) popisuje tzv. *rozvoj determinantu* podle i -tého řádku

I.7. Determinant matice

Uvažujme čtvercovou matici A typu $n \times n$. *Determinantem* matice A nazveme číslo $\det A$ (někdy též označovaný symbolem $|A|$), které dostaneme výpočtem podle následujících pravidel:

- a) je-li $A = (a)$ čtvercová matice typu 1×1 , potom je $\det A = a$
b) je-li $n > 1$, vybereme libovolný řádek (například i -tý) a položíme

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in},$$

kde A_{ij} je tzv. *algebraický doplněk* prvku a_{ij} v matici A :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}^*$$

kde A_{ij}^* je determinant části matice A , která vznikne vyškrtnutím i -tého řádku a j -tého sloupce

- bod b) popisuje tzv. *rozvoj determinantu* podle i -tého řádku
- prodbně lze počítat determinant rozvojem podle j -tého sloupce:

I.7. Determinant matice

Uvažujme čtvercovou matici A typu $n \times n$. *Determinantem* matice A nazveme číslo $\det A$ (někdy též označovaný symbolem $|A|$), které dostaneme výpočtem podle následujících pravidel:

- je-li $A = (a)$ čtvercová matice typu 1×1 , potom je $\det A = a$
- je-li $n > 1$, vybereme libovolný řádek (například i -tý) a položíme

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in},$$

kde A_{ij} je tzv. *algebraický doplněk* prvku a_{ij} v matici A :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}^*$$

kde A_{ij}^* je determinant části matice A , která vznikne vyškrtnutím i -tého řádku a j -tého sloupce

- bod b) popisuje tzv. *rozvoj determinantu* podle i -tého řádku
- podobně lze počítat determinant rozvojem podle j -tého sloupce:

$$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

I.7. Determinant matice

Uvažujme čtvercovou matici A typu $n \times n$. *Determinantem* matice A nazveme číslo $\det A$ (někdy též označovaný symbolem $|A|$), které dostaneme výpočtem podle následujících pravidel:

- a) je-li $A = (a)$ čtvercová matice typu 1×1 , potom je $\det A = a$
- b) je-li $n > 1$, vybereme libovolný řádek (například i -tý) a položíme

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in},$$

kde A_{ij} je tzv. *algebraický doplněk* prvku a_{ij} v matici A :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}^*$$

kde A_{ij}^* je determinant části matice A , která vznikne vyškrtnutím i -tého řádku a j -tého sloupce

- bod b) popisuje tzv. *rozvoj determinantu* podle i -tého řádku
- prodbně lze počítat determinant rozvojem podle j -tého sloupce:

$$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

Geometrická interpretace: Absolutní hodnota determinantu je rovna objemu rovnoběžnostěnu, vytvořeného nad řádky matice A

I.7. Determinant matice

Definice: Je-li matice A čtvercová typu $n \times n$, potom *determinant matice A* je definován vztahem

$$\det A = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \pi(j_1, j_2, \dots, j_n) a_{1, j_1} a_{2, j_2} \cdots a_{n, j_n}$$

kde sočin je přes všechny permutace čísel $\{1, 2, \dots, n\}$ a $\pi(j_1, \dots, j_n)$ je tzv. znaménko permutace.

I.7. Determinant matice

Definice: Je-li matice A čtvercová typu $n \times n$, potom *determinant matice A* je definován vztahem

$$\det A = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \pi(j_1, j_2, \dots, j_n) a_{1, j_1} a_{2, j_2} \cdots a_{n, j_n}$$

kde sočin je přes všechny permutace čísel $\{1, 2, \dots, n\}$ a $\pi(j_1, \dots, j_n)$ je tzv. znaménko permutace.

Výpočet determinantu:

a) $n = 1$: $\det(a) = a$

I.7. Determinant matice

Definice: Je-li matice A čtvercová typu $n \times n$, potom *determinant matice A* je definován vztahem

$$\det A = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \pi(j_1, j_2, \dots, j_n) a_{1, j_1} a_{2, j_2} \cdots a_{n, j_n}$$

kde sočin je přes všechny permutace čísel $\{1, 2, \dots, n\}$ a $\pi(j_1, \dots, j_n)$ je tzv. znaménko permutace.

Výpočet determinantu:

a) $n = 1$: $\det(a) = a$

b) $n = 2$: $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

I.7. Determinant matice

Definice: Je-li matice A čtvercová typu $n \times n$, potom *determinant matice A* je definován vztahem

$$\det A = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \pi(j_1, j_2, \dots, j_n) a_{1, j_1} a_{2, j_2} \cdots a_{n, j_n}$$

kde sočin je přes všechny permutace čísel $\{1, 2, \dots, n\}$ a $\pi(j_1, \dots, j_n)$ je tzv. znaménko permutace.

Výpočet determinantu:

a) $n = 1$: $\det(a) = a$

b) $n = 2$: $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

b) $n = 3$: $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$

I.7. Determinant matice

Definice: Je-li matice A čtvercová typu $n \times n$, potom *determinant matice A* je definován vztahem

Sarussovo pravidlo:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

kde sočin je
tzv. znaménko

$\cdot a_{n,j_n}$
, n a $\pi(j_1, \dots, j_n)$ je

Výpočet det

a) $n = 1$:

b) $n = 2$:

b) $n = 3$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

I.7. Determinant matice

Definice: Je-li matice A čtvercová typu $n \times n$, potom *determinant matice A* je definován vztahem

Sarussovo pravidlo:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$\cdot a_{n,j_n}$

, n a $\pi(j_1, \dots, j_n)$ je

kde sočin je
tzv. znaménko

Výpočet det

a) $n = 1$:

b) $n = 2$:

b) $n = 3$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

I.7. Determinant matice

Definice: Je-li matice A čtvercová typu $n \times n$, potom *determinant matice A* je definován vztahem

Sarussovo pravidlo:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

kde sočin je
tzv. znaménko

$\cdot a_{n,j_n}$
, n a $\pi(j_1, \dots, j_n)$ je

Výpočet det

a) $n = 1$:

b) $n = 2$:

b) $n = 3$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \underline{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

I.7. Determinant matice

Definice: Je-li matice A čtvercová typu $n \times n$, potom *determinant matice A* je definován vztahem

kde sočin je
tzv. znaménko

Sarussovo pravidlo:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a_{11}, a_{12}, a_{13}
 a_{21}, a_{22}, a_{23}

$\cdot a_{n,j_n}$
, n a $\pi(j_1, \dots, j_n)$ je

Výpočet det

a) $n = 1$:

b) $n = 2$:

b) $n = 3$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}}_{\text{green line}} - \underbrace{a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}}_{\text{red line}}$$

I.7. Determinant matice

Definice: Je-li matice A čtvercová typu $n \times n$, potom *determinant matice A* je definován vztahem

$$\det A = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \pi(j_1, j_2, \dots, j_n) a_{1, j_1} a_{2, j_2} \cdots a_{n, j_n}$$

kde sočin je přes všechny permutace čísel $\{1, 2, \dots, n\}$ a $\pi(j_1, \dots, j_n)$ je tzv. znaménko permutace.

Výpočet determinantu:

a) $n = 1$: $\det(a) = a$

b) $n = 2$: $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

b) $n = 3$: $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}}_{\text{zelená čára}}$
 $\quad \quad \quad \underbrace{-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}}_{\text{červená čára}}$

c) $n > 3$: rozvojem podle nějakého řádku nebo sloupce

I.7. Determinant matice, vlastnosti

I.7. Determinant matice, vlastnosti

a) $\det A = \det A^T$

I.7. Determinant matice, vlastnosti

a) $\det A = \det A^T$

b) Jsou-li A a B čtvercové matice stejného typu, je
$$\det(A.B) = \det A \cdot \det B$$

I.7. Determinant matice, vlastnosti

- a) $\det A = \det A^T$
- b) Jsou-li A a B čtvercové matice stejného typu, je
$$\det(A.B) = \det A \cdot \det B$$
- c) Obsahuje-li matice A nulový řádek nebo sloupec, je $\det A = 0$

I.7. Determinant matice, vlastnosti

- a) $\det A = \det A^T$
- b) Jsou-li A a B čtvercové matice stejného typu, je
$$\det(A.B) = \det A \cdot \det B$$
- c) Obsahuje-li matice A nulový řádek nebo sloupec, je $\det A = 0$
- d) Vyměníme-li v matici A dva sousední řádky nebo sloupce, celý determinant změní znaménko

I.7. Determinant matice, vlastnosti

- a) $\det A = \det A^T$
- b) Jsou-li A a B čtvercové matice stejného typu, je
$$\det(A.B) = \det A \cdot \det B$$
- c) Obsahuje-li matice A nulový řádek nebo sloupec, je $\det A = 0$
- d) Vyměníme-li v matici A dva sousední řádky nebo sloupce, celý determinant změní znaménko
- e) vynásobíme-li některý řádek (sloupec) matice A číslem λ , je determinant nové matice roven $\lambda \cdot \det A$

I.7. Determinant matice, vlastnosti

- a) $\det A = \det A^T$
- b) Jsou-li A a B čtvercové matice stejného typu, je
$$\det(A.B) = \det A \cdot \det B$$
- c) Obsahuje-li matice A nulový řádek nebo sloupec, je $\det A = 0$
- d) Vyměníme-li v matici A dva sousední řádky nebo sloupce, celý determinant změní znaménko
- e) vynásobíme-li některý řádek (sloupec) matice A číslem λ , je determinant nové matice roven $\lambda \cdot \det A$
- f) Determinant se nezmění, přičteme-li k libovolnému řádku (sloupci) lineární kombinaci ostatních řádků (sloupců)

I.7. Determinant matice, vlastnosti

- a) $\det A = \det A^T$
- b) Jsou-li A a B čtvercové matice stejného typu, je
$$\det(A.B) = \det A \cdot \det B$$
- c) Obsahuje-li matice A nulový řádek nebo sloupec, je $\det A = 0$
- d) Vyměníme-li v matici A dva sousední řádky nebo sloupce, celý determinant změní znaménko
- e) vynásobíme-li některý řádek (sloupec) matice A číslem λ , je determinant nové matice roven $\lambda \cdot \det A$
- f) Determinant se nezmění, přičteme-li k libovolnému řádku (sloupci) lineární kombinaci ostatních řádků (sloupců)

Z vlastností c), f) vyplývají přímo dvě následující vlastnosti:

- a) Je-li některý řádek (sloupec) v matici A násobkem jiného řádku (sloupce), je $\det A = 0$
- b) Je-li v matici A některý řádek (sloupec) lineární kombinací ostatních řádků (sloupců), je $\det A = 0$

I.8. Inverzní matice

Čtvercovou matici $n \times n$ s hodností n nazýváme *regulární*.
Je-li její hodnost menší než n , potom říkáme, že je *singulární*.

I.8. Inverzní matice

Čtvercovou matici $n \times n$ s hodností n nazýváme *regulární*.
Je-li její hodnost menší než n , potom říkáme, že je *singulární*.

Definice: Je-li matice A regulární, potom k ní existuje matice A^{-1} taková, že

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I,$$

kde I je jednotková matice stejného rozměru jako A . Matici A^{-1} nazýváme inverzní maticí k matici A .

I.8. Inverzní matice

Čtvercovou matici $n \times n$ s hodností n nazýváme *regulární*.
Je-li její hodnost menší než n , potom říkáme, že je *singulární*.

Definice: Je-li matice A regulární, potom k ní existuje matice A^{-1} taková, že

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I,$$

kde I je jednotková matice stejného rozměru jako A . Matici A^{-1} nazýváme inverzní maticí k matici A .

- Matice A je regulární právě když $\det A \neq 0$.

I.8. Inverzní matice

Čtvercovou matici $n \times n$ s hodností n nazýváme *regulární*.
Je-li její hodnost menší než n , potom říkáme, že je *singulární*.

Definice: Je-li matice A regulární, potom k ní existuje matice A^{-1} taková, že

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I,$$

kde I je jednotková matice stejného rozměru jako A . Matici A^{-1} nazýváme inverzní maticí k matici A .

- Matice A je regulární právě když $\det A \neq 0$.
- Pro inverzní matice platí

I.8. Inverzní matice

Čtvercovou matici $n \times n$ s hodností n nazýváme *regulární*.
Je-li její hodnost menší než n , potom říkáme, že je *singulární*.

Definice: Je-li matice A regulární, potom k ní existuje matice A^{-1} taková, že

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I,$$

kde I je jednotková matice stejného rozměru jako A . Matici A^{-1} nazýváme inverzní maticí k matici A .

- Matice A je regulární právě když $\det A \neq 0$.
- Pro inverzní matice platí
 - $(A^{-1})^{-1} = A$

I.8. Inverzní matice

Čtvercovou matici $n \times n$ s hodností n nazýváme *regulární*.
Je-li její hodnost menší než n , potom říkáme, že je *singulární*.

Definice: Je-li matice A regulární, potom k ní existuje matice A^{-1} taková, že

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I,$$

kde I je jednotková matice stejného rozměru jako A . Matici A^{-1} nazýváme inverzní maticí k matici A .

- Matice A je regulární právě když $\det A \neq 0$.
- Pro inverzní matice platí
 - $(A^{-1})^{-1} = A$
 - $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

I.8. Inverzní matice, výpočet

Výpočet inverzní matice pomocí matice adjungované:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

A_{ij} jsou algebraické doplňky prvků a_{ij} v matici A .

I.8. Inverzní matice, výpočet

Výpočet inverzní matice pomocí matice adjungované:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

A_{ij} jsou algebraické doplňky prvků a_{ij} v matici A .

Výpočet inverzní matice pomocí ekvivalentních úprav:

$$(A | I) \sim \cdots \sim (I | A^{-1})$$

Úpravy se mohou provádět pouze na řádcích celé rozšířené matice.

I.9. Soustava lineárních algebraických rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

n = počet neznámých
 m = počet rovnic
(obecně nemusí být $n = m$)

I.9. Soustava lineárních algebraických rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Zápis soustavy v maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

n = počet neznámých
m = počet rovnic
(obecně nemusí být n = m)

I.9. Soustava lineárních algebraických rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Zápis soustavy v maticovém tvaru:

matice
soustavy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

n = počet neznámých
 m = počet rovnic
(obecně nemusí být $n = m$)

I.9. Soustava lineárních algebraických rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

vektor
neznámých

Zápis soustavy v maticovém tvaru:

matice
soustavy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

n = počet neznámých
m = počet rovnic
(obecně nemusí být n = m)

I.9. Soustava lineárních algebraických rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Zápis soustavy v maticovém tvaru:

matice soustavy

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

=

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

vektor pravých stran

vektor neznámých

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

n = počet neznámých
 m = počet rovnic
 (obecně nemusí být n = m)

I.9. Soustava lineárních algebraických rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Zápis soustavy v maticovém tvaru:

matice soustavy

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

=

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

vektor neznámých

vektor pravých stran

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

n = počet neznámých
 m = počet rovnic
 (obecně nemusí být n = m)

I.9. Soustava lineárních algebraických rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Zápis soustavy v maticovém tvaru:

matice soustavy

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

vektor
neznámých

vektor
pravých
stran

A.x = b

rozšířená matice soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

n = počet neznámých
m = počet rovnic
(obecně nemusí být n = m)

(A|b)

I.10. Frobeniova věta

Soustava m lineárních algebraických rovnic o n neznámých má řešení právě tehdy, je-li hodnota matice soustavy rovna hodnotě matice soustavy rozšířené o vektor pravých stran.

I.10. Frobeniova věta

Soustava m lineárních algebraických rovnic o n neznámých má řešení právě tehdy, je-li hodnota matice soustavy rovna hodnotě matice soustavy rozšířené o vektor pravých stran.

$$\text{Soustava má řešení} \iff h(A) = h(A|\mathbf{b})$$

I.10. Frobeniova věta

Soustava m lineárních algebraických rovnic o n neznámých má řešení právě tehdy, je-li hodnota matice soustavy rovna hodnotě matice soustavy rozšířené o vektor pravých stran.

$$\text{Soustava má řešení} \iff h(A) = h(A|\mathbf{b})$$

Je-li $h(A) = h(A|\mathbf{b}) = n$, potom má soustava právě jedno řešení.
Je-li $h(A) = h(A|\mathbf{b}) < n$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení.

I.10. Frobeniova věta

Soustava m lineárních algebraických rovnic o n neznámých má řešení právě tehdy, je-li hodnota matice soustavy rovna hodnotě matice soustavy rozšířené o vektor pravých stran.

$$\text{Soustava má řešení} \iff h(A) = h(A|\mathbf{b})$$

Je-li $h(A) = h(A|\mathbf{b}) = n$, potom má soustava právě jedno řešení.
Je-li $h(A) = h(A|\mathbf{b}) < n$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení.

- Případ kdy $h(A) = h(A|\mathbf{b}) > n$ nikdy nemůže nastat!

I.10. Frobeniova věta

Soustava m lineárních algebraických rovnic o n neznámých má řešení právě tehdy, je-li hodnota matice soustavy rovna hodnotě matice soustavy rozšířené o vektor pravých stran.

$$\text{Soustava má řešení} \iff h(A) = h(A|\mathbf{b})$$

Je-li $h(A) = h(A|\mathbf{b}) = n$, potom má soustava právě jedno řešení.
Je-li $h(A) = h(A|\mathbf{b}) < n$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení.

- Příklad kdy $h(A) = h(A|\mathbf{b}) > n$ nikdy nemůže nastat!
- Pokud je $h(A) = h(A|\mathbf{b}) = k < n$, potom množinu všech řešení lze vyjádřit pomocí $n-k$ obecných parametrů.

I.10. Frobeniova věta

Soustava m lineárních algebraických rovnic o n neznámých má řešení právě tehdy, je-li hodnota matice soustavy rovna hodnotě matice soustavy rozšířené o vektor pravých stran.

$$\text{Soustava má řešení} \iff h(A) = h(A|\mathbf{b})$$

Je-li $h(A) = h(A|\mathbf{b}) = n$, potom má soustava právě jedno řešení.
Je-li $h(A) = h(A|\mathbf{b}) < n$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení.

- Příklad kdy $h(A) = h(A|\mathbf{b}) > n$ nikdy nemůže nastat!
- Pokud je $h(A) = h(A|\mathbf{b}) = k < n$, potom množinu všech řešení lze vyjádřit pomocí $n-k$ obecných parametrů.
- Pokud je $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, je vždy $h(A) = h(A|\mathbf{0})$ a tedy taková soustava má vždy řešení (jedná se o tzv. *homogenní soustavu rovnic*)

I.10. Frobeniova věta

Soustava m lineárních algebraických rovnic o n neznámých má řešení právě tehdy, je-li hodnota matice soustavy rovna hodnotě matice soustavy rozšířené o vektor pravých stran.

$$\text{Soustava má řešení} \Leftrightarrow h(A) = h(A|\mathbf{b})$$

Je-li $h(A) = h(A|\mathbf{b}) = n$, potom má soustava právě jedno řešení.
Je-li $h(A) = h(A|\mathbf{b}) < n$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení.

- Příklad kdy $h(A) = h(A|\mathbf{b}) > n$ nikdy nemůže nastat!
- Pokud je $h(A) = h(A|\mathbf{b}) = k < n$, potom množinu všech řešení lze vyjádřit pomocí $n-k$ obecných parametrů.
- Pokud je $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, je vždy $h(A) = h(A|\mathbf{0})$ a tedy taková soustava má vždy řešení (jedná se o tzv. *homogenní soustavu rovnic*)
- Je-li hodnota matice homogenní soustavy rovna počtu neznámých n , tedy $h(A) = n$, má tato soustava pouze triviální řešení $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

I.10. Frobeniova věta

Soustava m lineárních algebraických rovnic o n neznámých má řešení právě tehdy, je-li hodnota matice soustavy rovna hodnotě matice soustavy rozšířené o vektor pravých stran.

$$\text{Soustava má řešení} \Leftrightarrow h(A) = h(A|\mathbf{b})$$

Je-li $h(A) = h(A|\mathbf{b}) = n$, potom má soustava právě jedno řešení.
Je-li $h(A) = h(A|\mathbf{b}) < n$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení.

- Příklad kdy $h(A) = h(A|\mathbf{b}) > n$ nikdy nemůže nastat!
- Pokud je $h(A) = h(A|\mathbf{b}) = k < n$, potom množinu všech řešení lze vyjádřit pomocí $n-k$ obecných parametrů.
- Pokud je $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, je vždy $h(A) = h(A|\mathbf{0})$ a tedy taková soustava má vždy řešení (jedná se o tzv. *homogenní soustavu rovnic*)
- Je-li hodnota matice homogenní soustavy rovna počtu neznámých n , tedy $h(A) = n$, má tato soustava pouze triviální řešení $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Je-li hodnota matice homogenní soustavy menší než n , potom množina všech jejích řešení vytvoří podprostor \mathbf{R}^n dimenze $n-h(A)$.

I.11. Metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Gaussova eliminační metoda:

I.11. Metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Gaussova eliminační metoda:

- i. vezmeme rozšířenou matici soustavy a převedeme ji posloupností ekvivalentních řádkových úprav na trojúhelníkový tvar

I.11. Metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Gaussova eliminační metoda:

- i. vezmeme rozšířenou matici soustavy a převedeme ji posloupností ekvivalentních řádkových úprav na trojúhelníkový tvar
- ii. výslednou matici opět vyjádříme jako soustavu rovnic, kterou řešíme "zdola nahoru"

I.11. Metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Gaussova eliminační metoda:

- i. vezmeme rozšířenou matici soustavy a převedeme ji posloupností ekvivalentních řádkových úprav na trojúhelníkový tvar
- ii. výslednou matici opět vyjádříme jako soustavu rovnic, kterou řešíme "zdola nahoru"

Gaussovu eliminační metodu lze použít na jakoukoli soustavu algebraických rovnic.

I.11. Metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Gaussova eliminační metoda:

- i. vezmeme rozšířenou matici soustavy a převedeme ji posloupností ekvivalentních řádkových úprav na trojúhelníkový tvar
- ii. výslednou matici opět vyjádříme jako soustavu rovnic, kterou řešíme "zdola nahoru"

Gaussovu eliminační metodu lze použít na jakoukoli soustavu algebraických rovnic.

Řešení soustavy rovnic s použitím Cramerova pravidla:

I.11. Metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Gaussova eliminační metoda:

- i. vezmeme rozšířenou matici soustavy a převedeme ji posloupností ekvivalentních řádkových úprav na trojúhelníkový tvar
- ii. výslednou matici opět vyjádříme jako soustavu rovnic, kterou řešíme "zdola nahoru"

Gaussovu eliminační metodu lze použít na jakoukoli soustavu algebraických rovnic.

Řešení soustavy rovnic s použitím Cramerova pravidla:

- i. spočteme determinant matice soustavy $d = \det A$. Pokud je různý od nuly, pokračujeme dál. V
opačném případě Cramerovo pravidlo nelze použít.

I.11. Metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Gaussova eliminační metoda:

- i. vezmeme rozšířenou matici soustavy a převedeme ji posloupností ekvivalentních řádkových úprav na trojúhelníkový tvar
- ii. výslednou matici opět vyjádříme jako soustavu rovnic, kterou řešíme "zdola nahoru"

Gaussovou eliminační metodu lze použít na jakoukoli soustavu algebraických rovnic.

Řešení soustavy rovnic s použitím Cramerova pravidla:

- i. spočteme determinant matice soustavy $d = \det A$. Pokud je různý od nuly, pokračujeme dál. V
opačném případě Cramerovo pravidlo nelze použít.
- ii. spočteme determinanty $d_i = \det A_i$, $i = 1, \dots, n$ kde A_i je matice, která vznikne z matice A záměnou i -tého sloupce za vektor pravých stran.

I.11. Metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Gaussova eliminační metoda:

- i. vezmeme rozšířenou matici soustavy a převedeme ji posloupností ekvivalentních řádkových úprav na trojúhelníkový tvar
- ii. výslednou matici opět vyjádříme jako soustavu rovnic, kterou řešíme "zdola nahoru"

Gaussovu eliminační metodu lze použít na jakoukoli soustavu algebraických rovnic.

Řešení soustavy rovnic s použitím Cramerova pravidla:

- i. spočteme determinant matice soustavy $d = \det A$. Pokud je různý od nuly, pokračujeme dál. V
opačném případě Cramerovo pravidlo nelze použít.
- ii. spočteme determinanty $d_i = \det A_i$, $i = 1, \dots, n$ kde A_i je matice, která vznikne z matice A záměnou i -tého sloupce za vektor pravých stran.
- iii. potom pro řešení (x_1, \dots, x_n) platí, že $x_i = \frac{d_i}{d}$, $i = 1, \dots, n$.

I.11. Metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Řešení pomocí inverzní matice:

I.11. Metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Řešení pomocí inverzní matice:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

I.11. Metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Řešení pomocí inverzní matice:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

I.11. Metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Řešení pomocí inverzní matice:

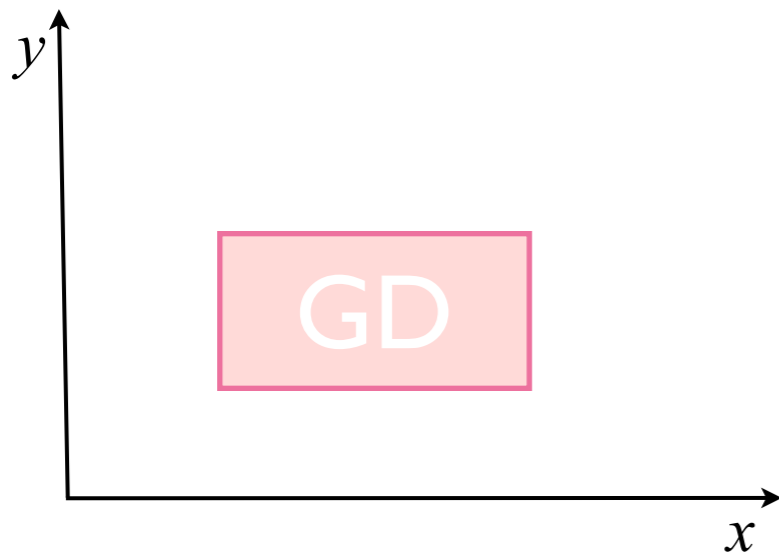
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

Stejně jako Cramerovo pravidlo, tuto metodu lze použít pouze když
 $\det \mathbf{A} \neq 0$

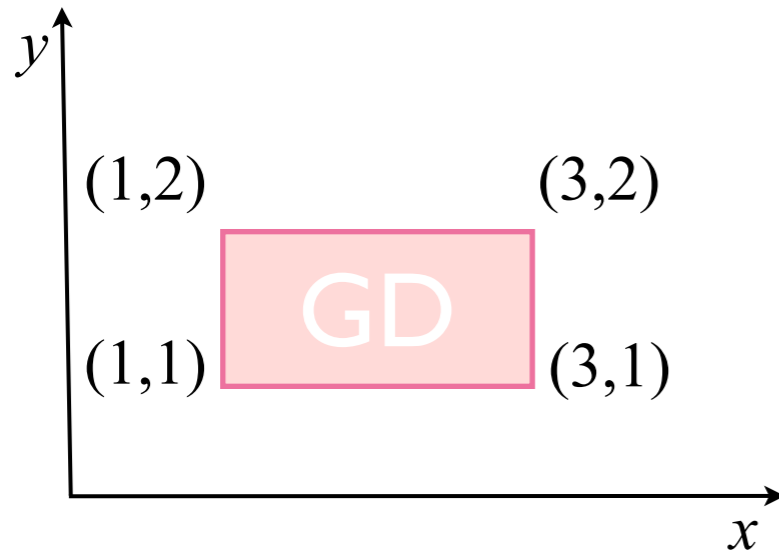
I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



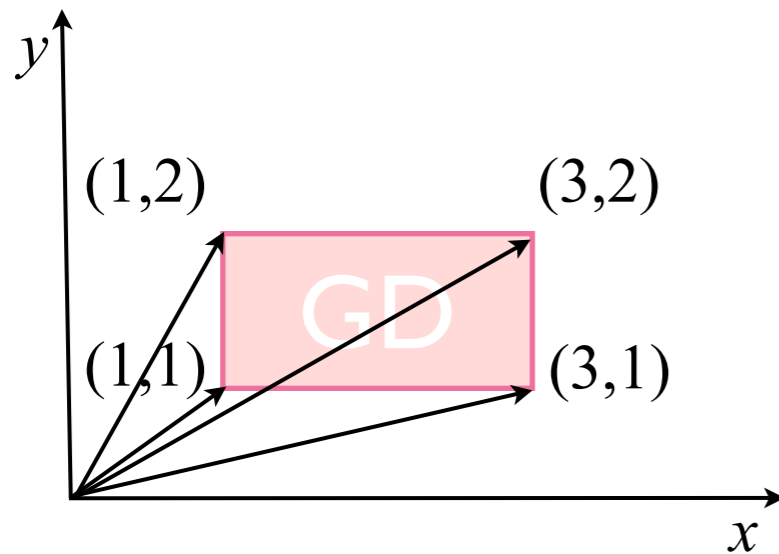
I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



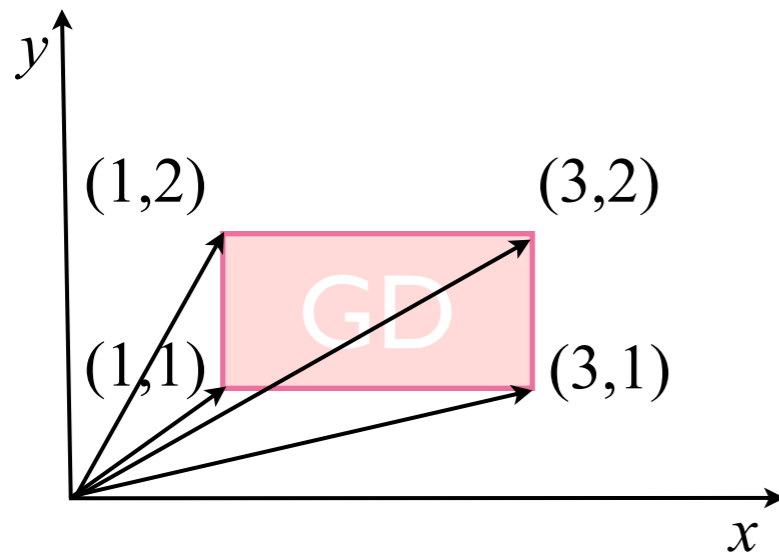
I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

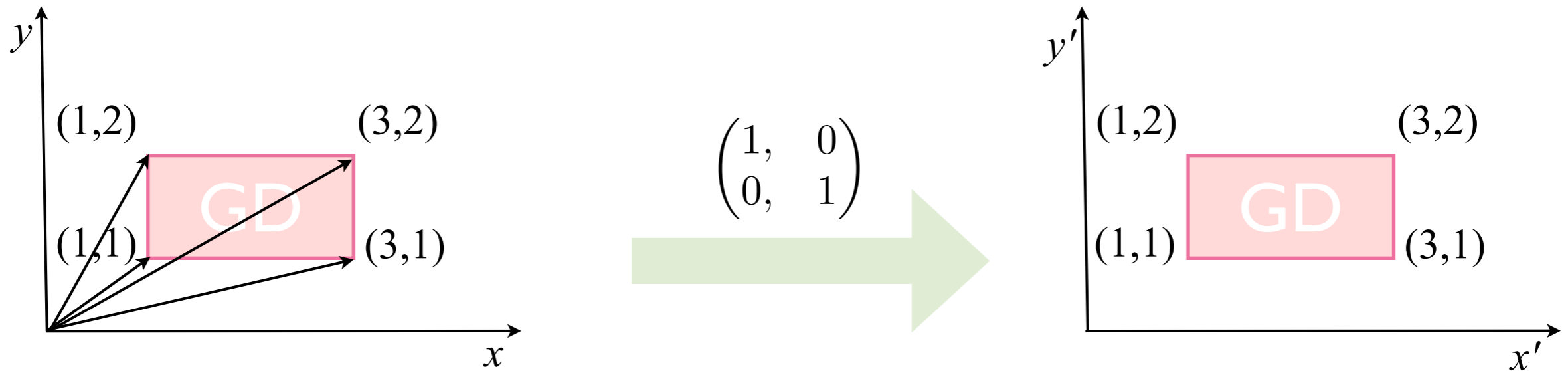
Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

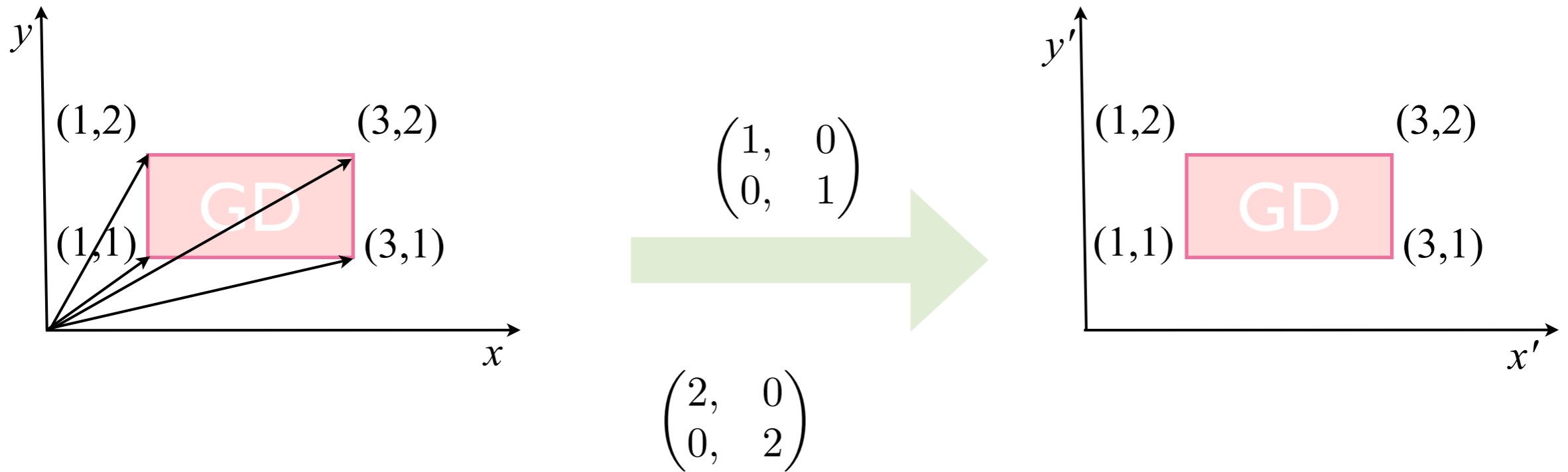
I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



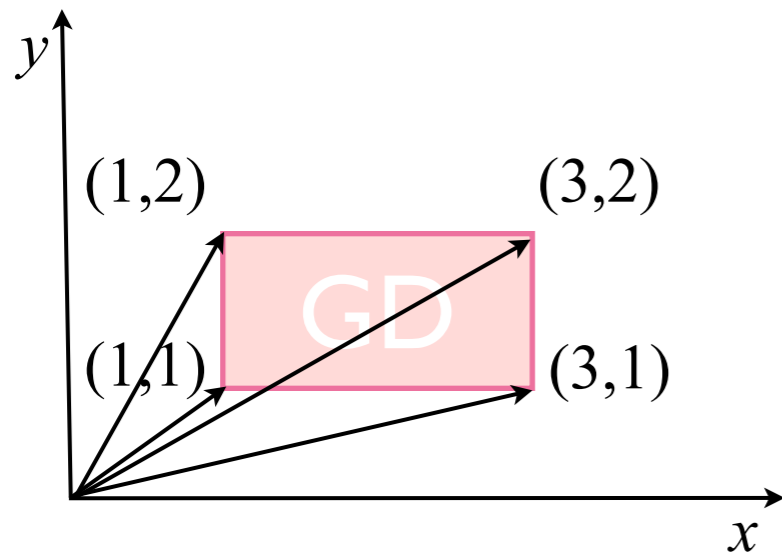
I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

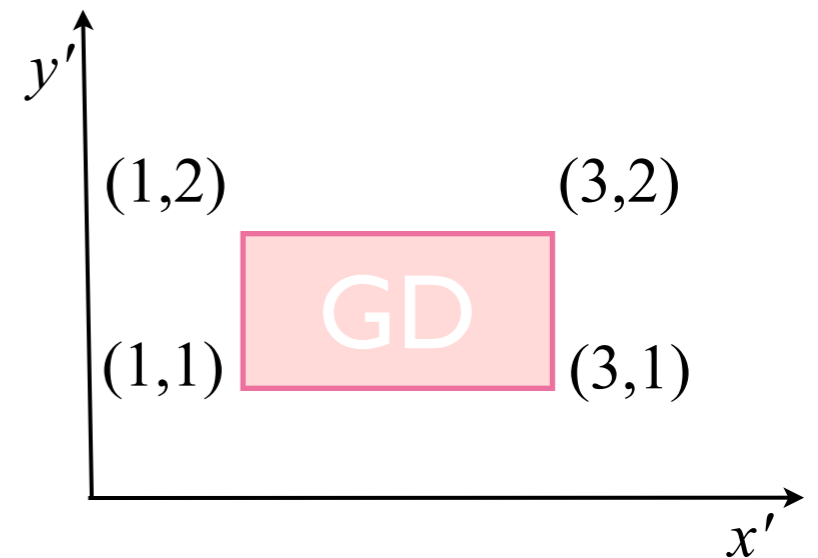


I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

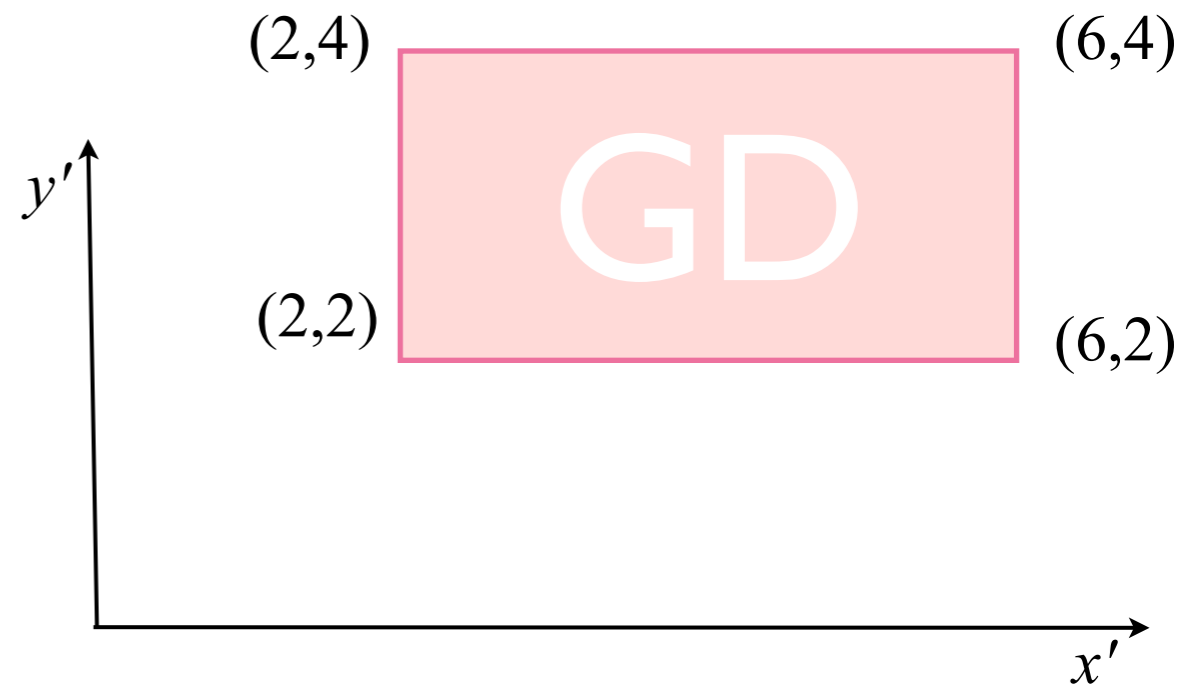
Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

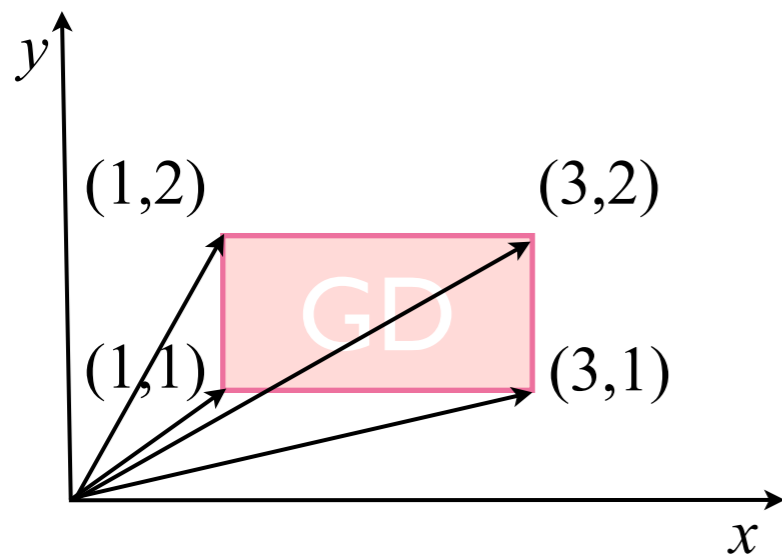


$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

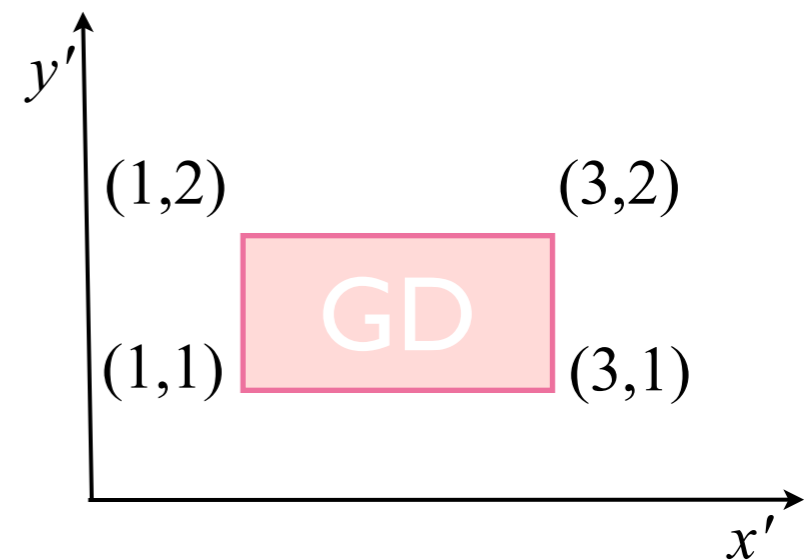


I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

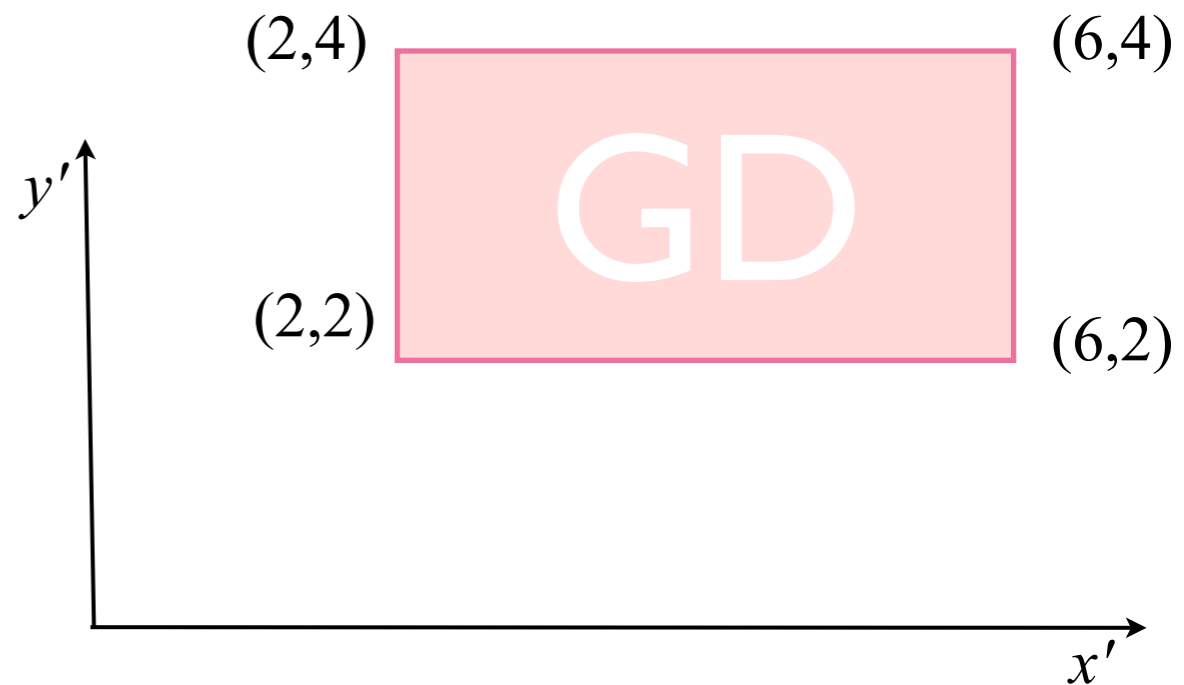


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



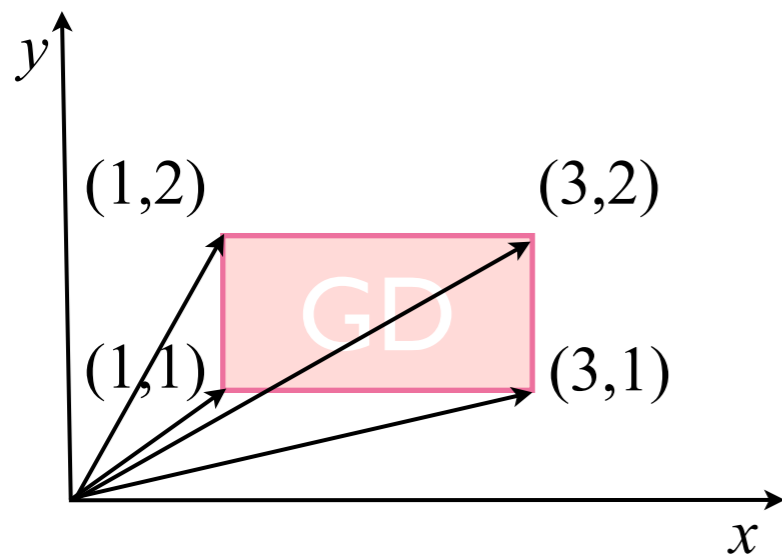
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

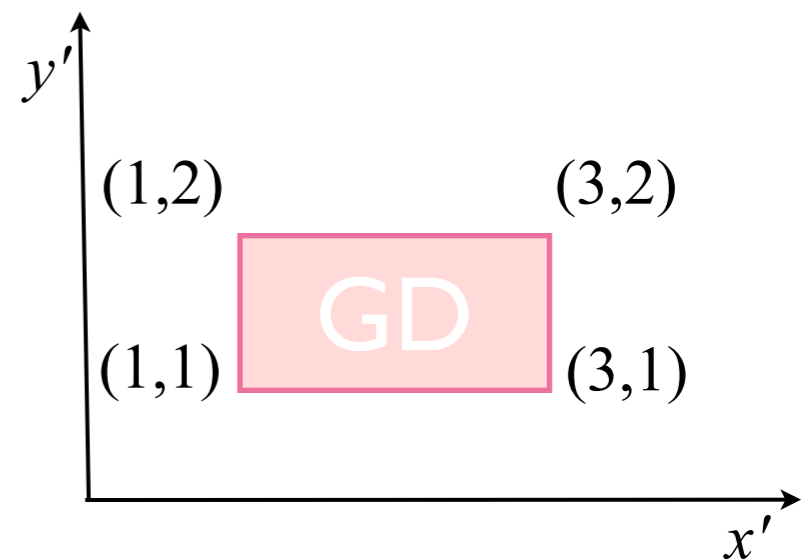


I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

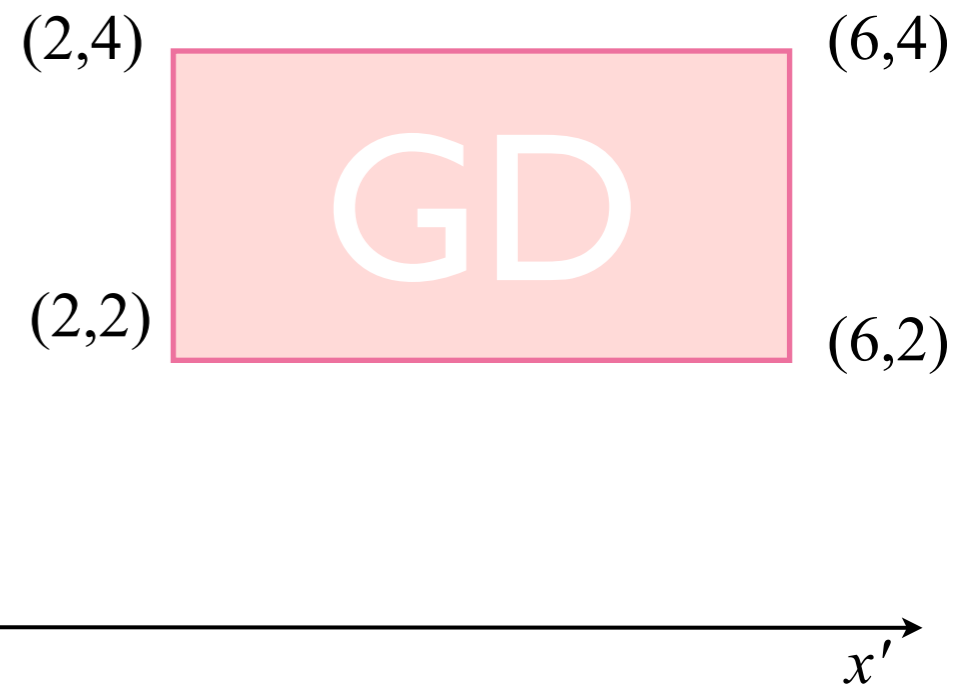
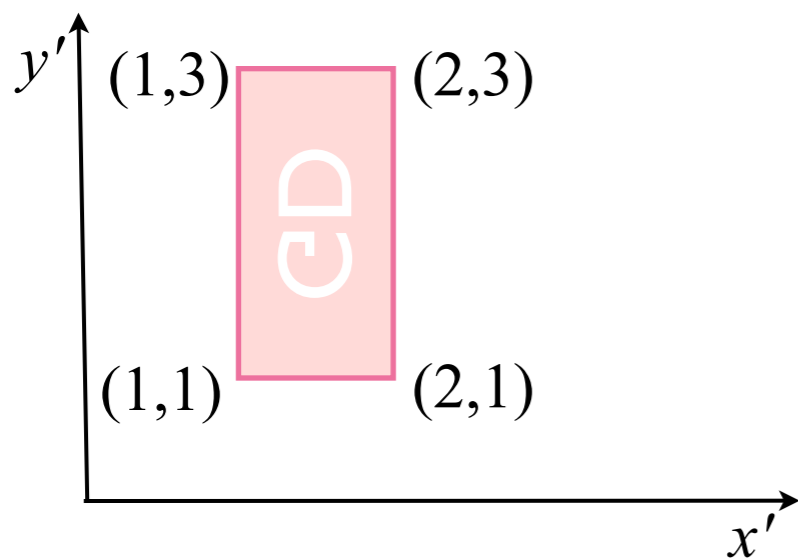


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



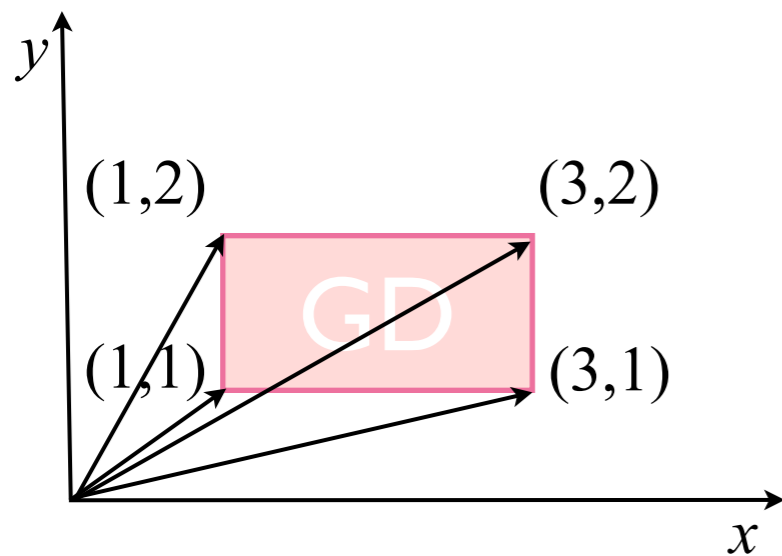
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$



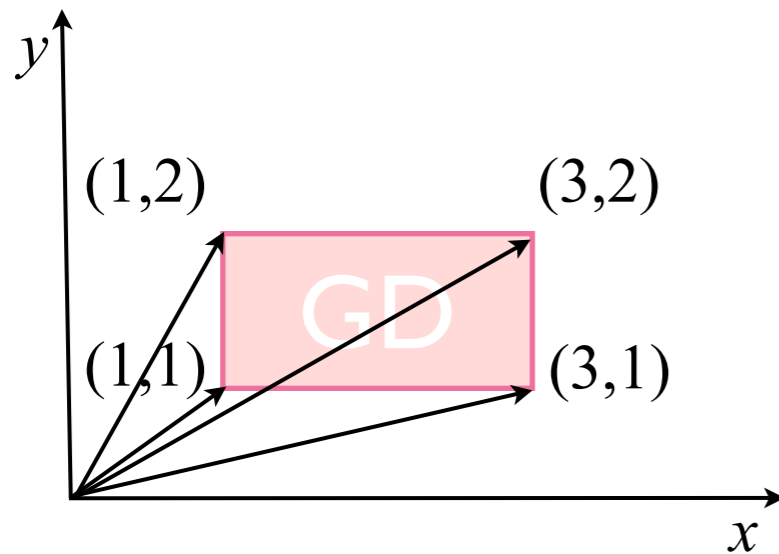
I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

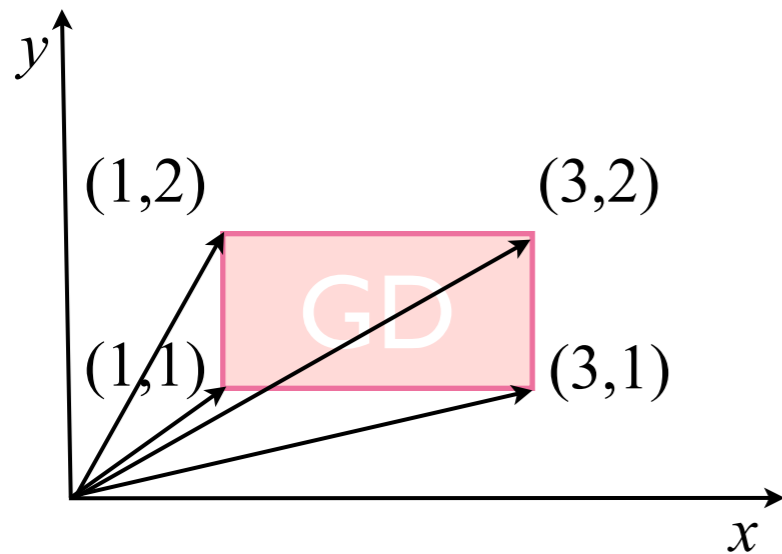
Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



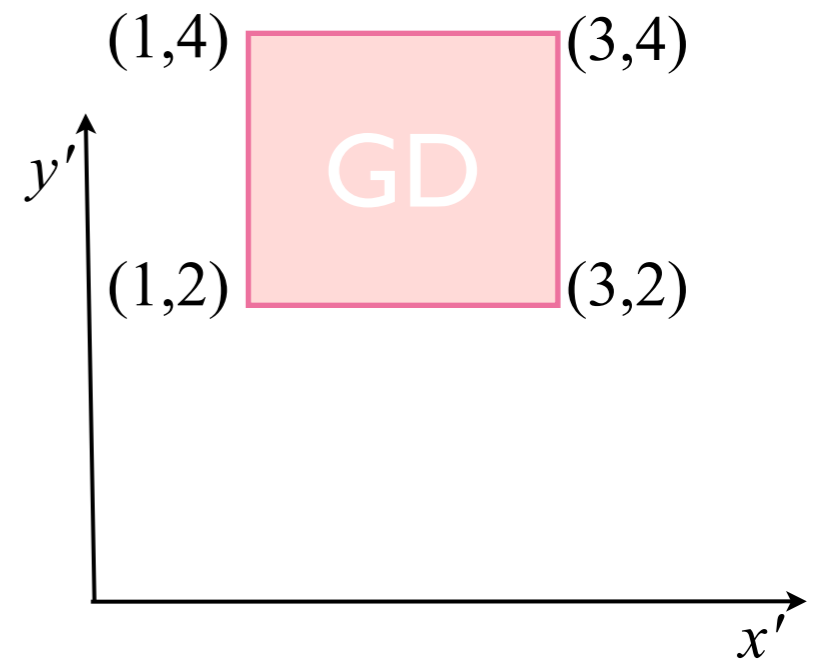
$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 2 \end{pmatrix}$$

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

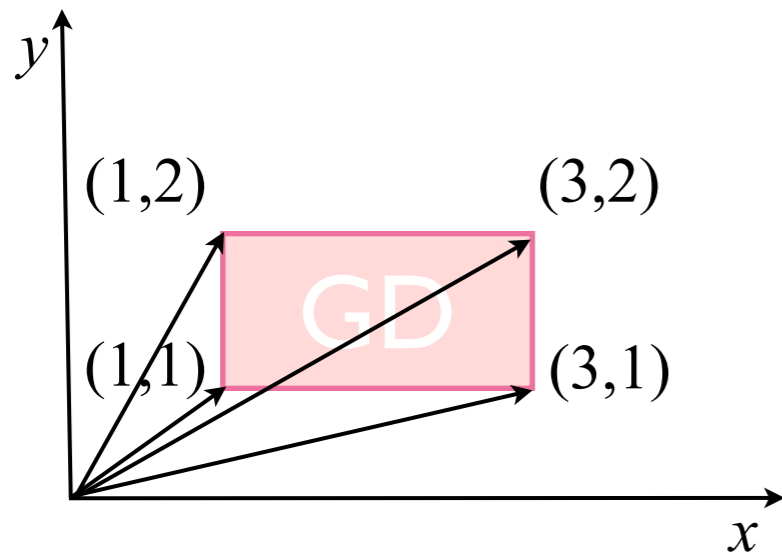


$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 2 \end{pmatrix}$$

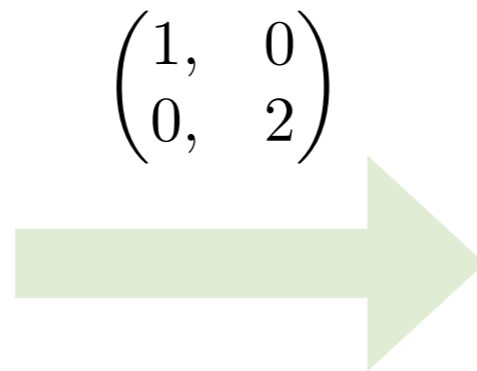


I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

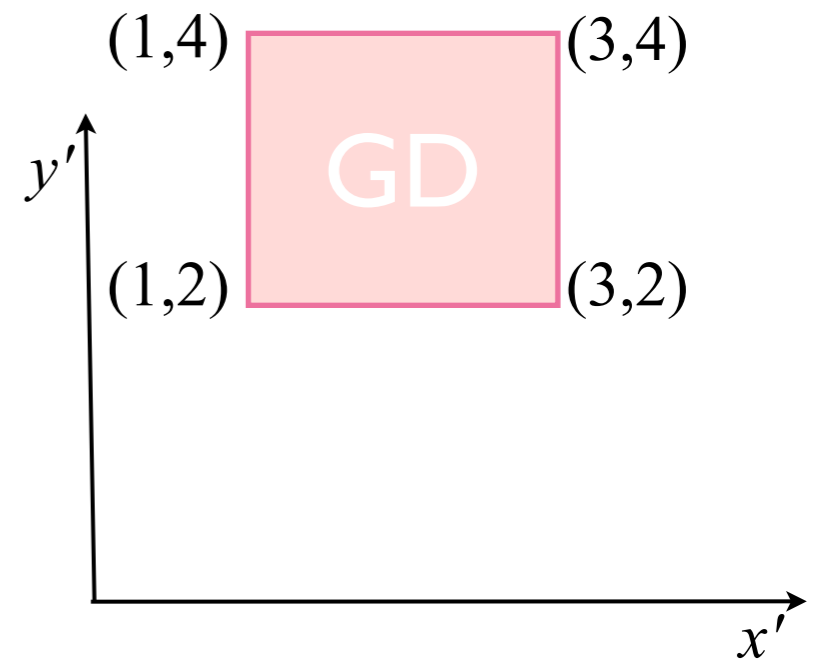
Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

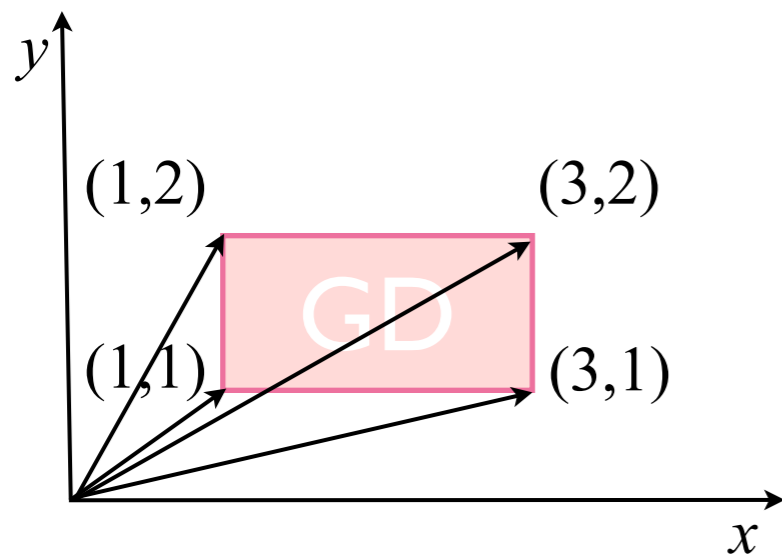


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

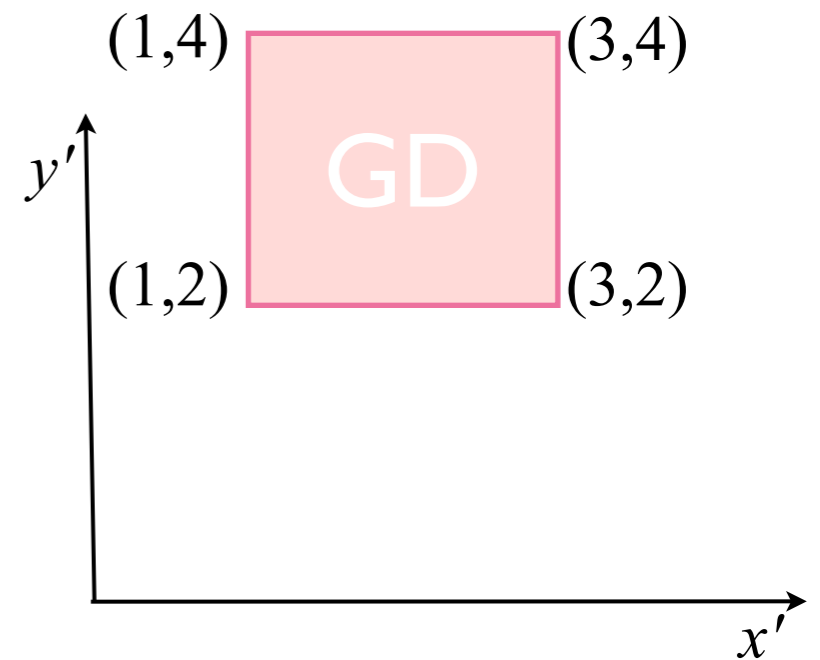


I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

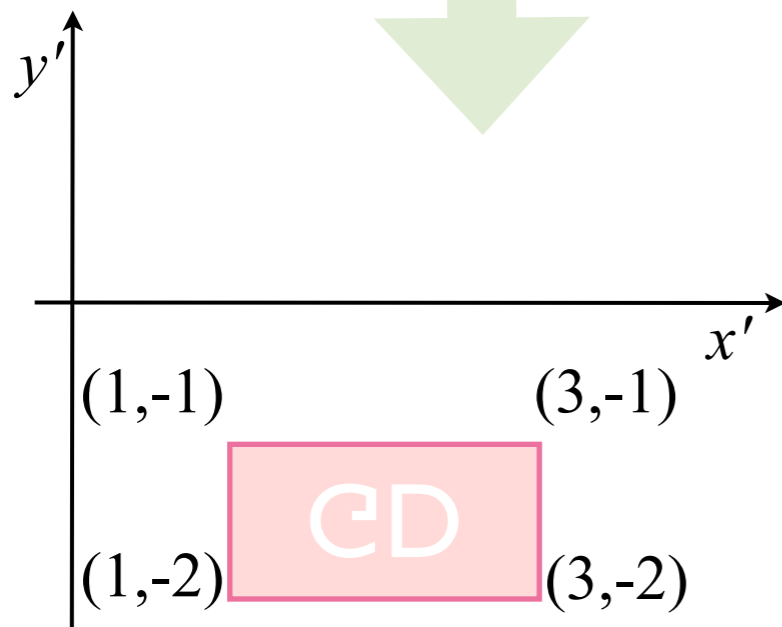
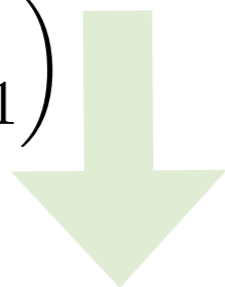
Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 2 \end{pmatrix}$$

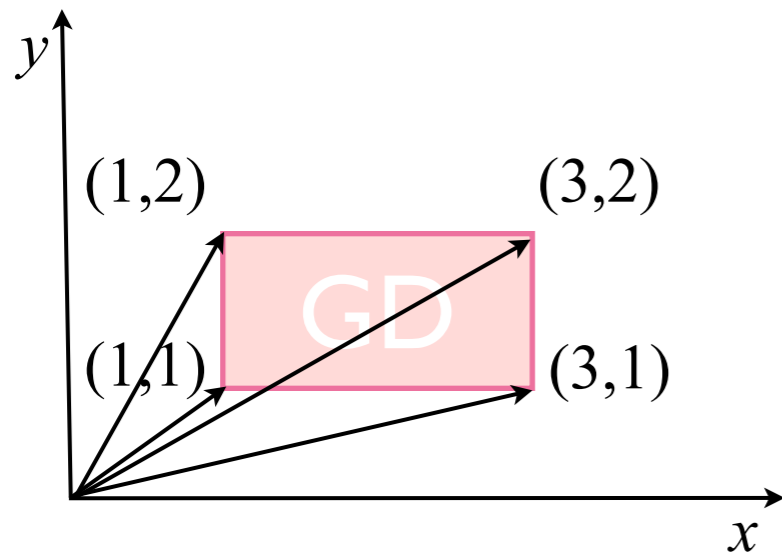


$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$$

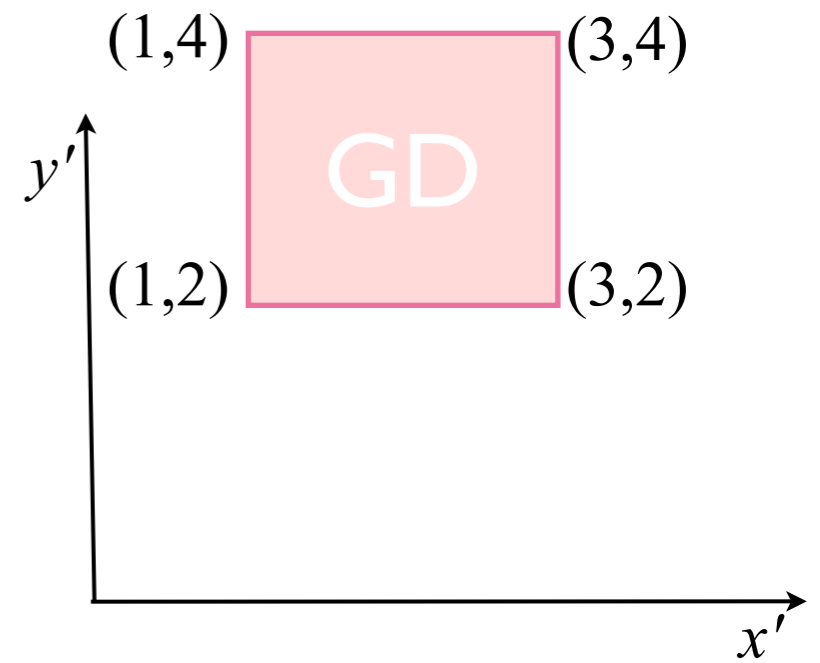
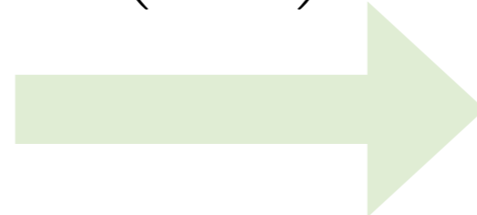


I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

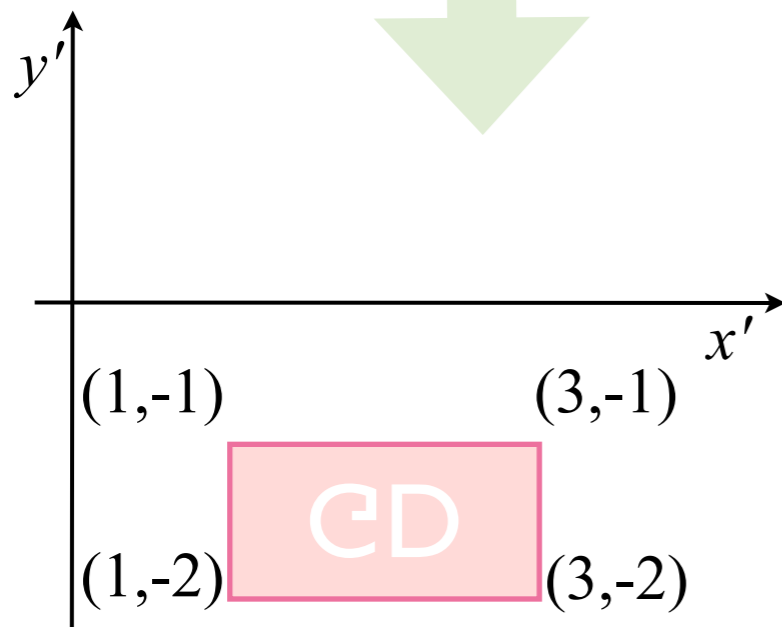
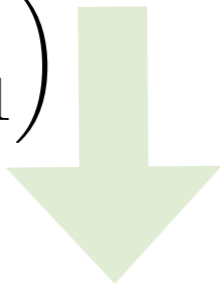


$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 2 \end{pmatrix}$$



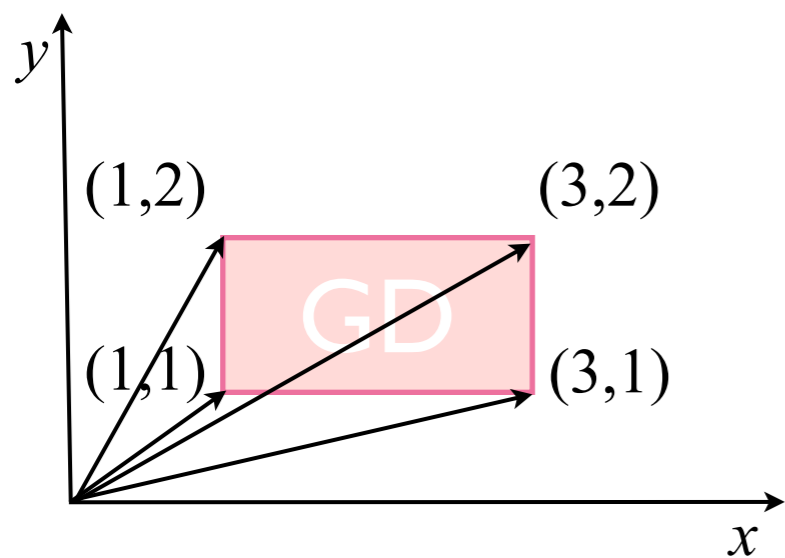
$$\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ -1, & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$$

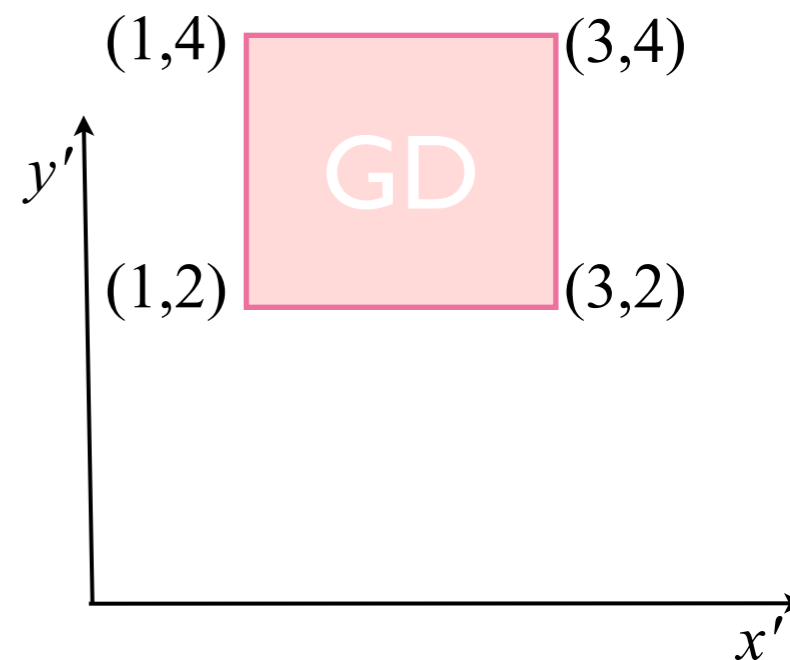


I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

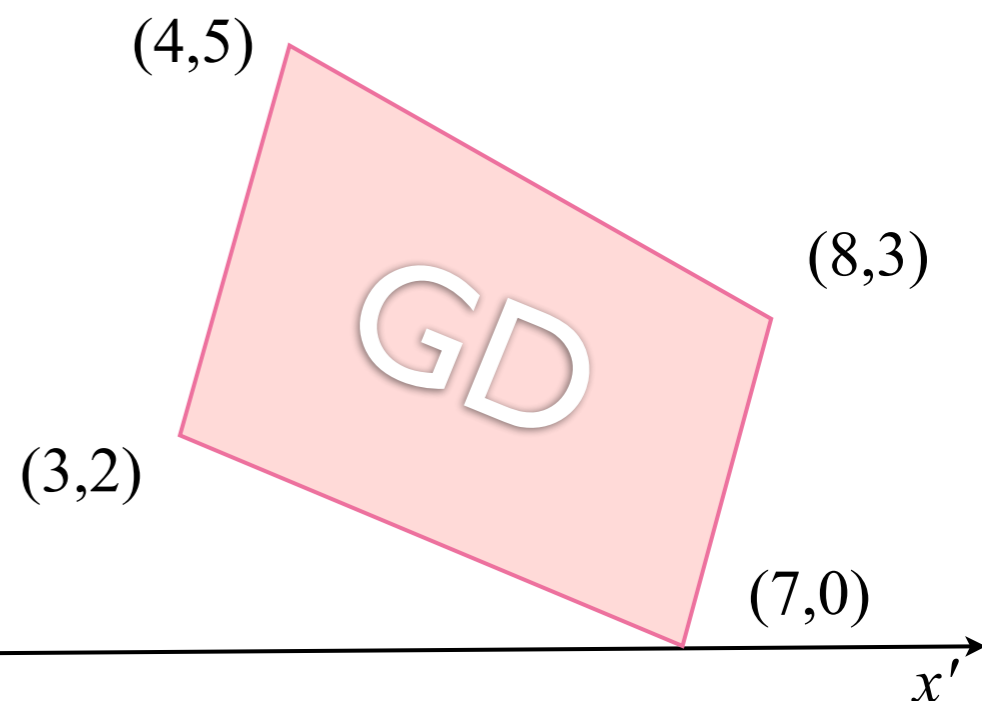
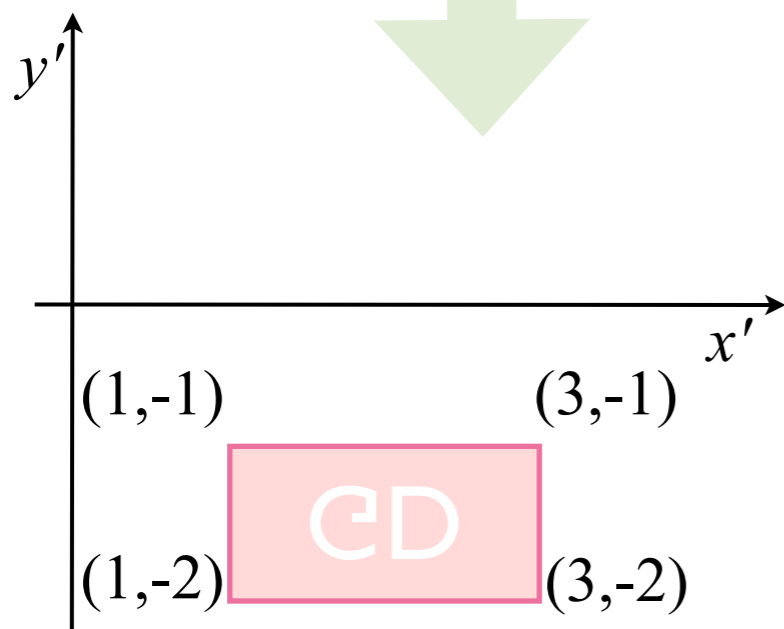


$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 2 \end{pmatrix}$$



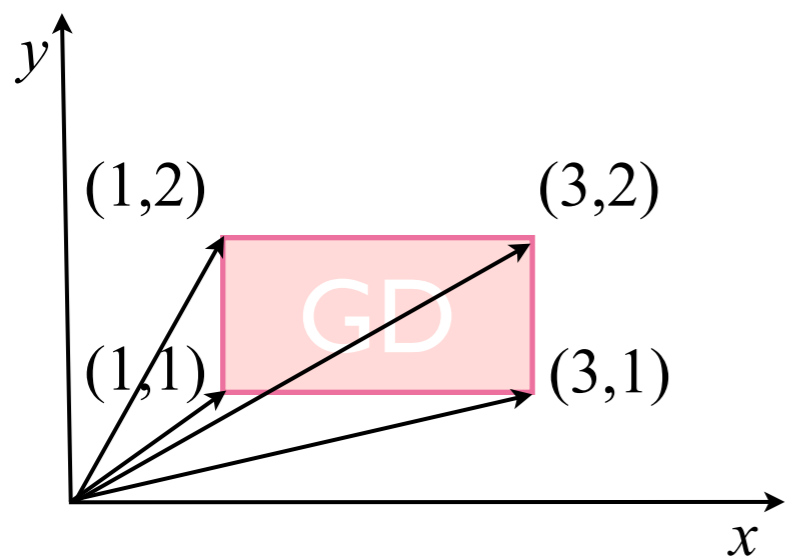
$$\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ -1, & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$$

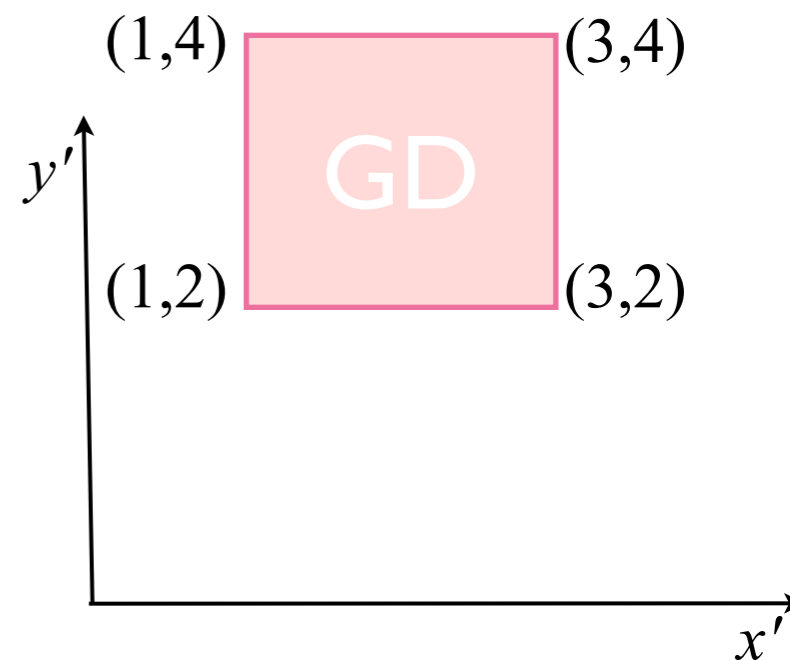


I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

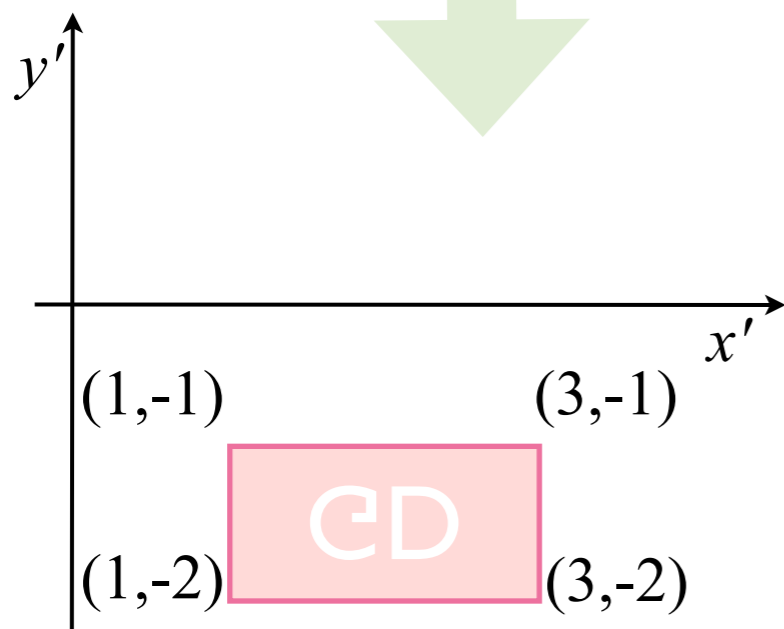
Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



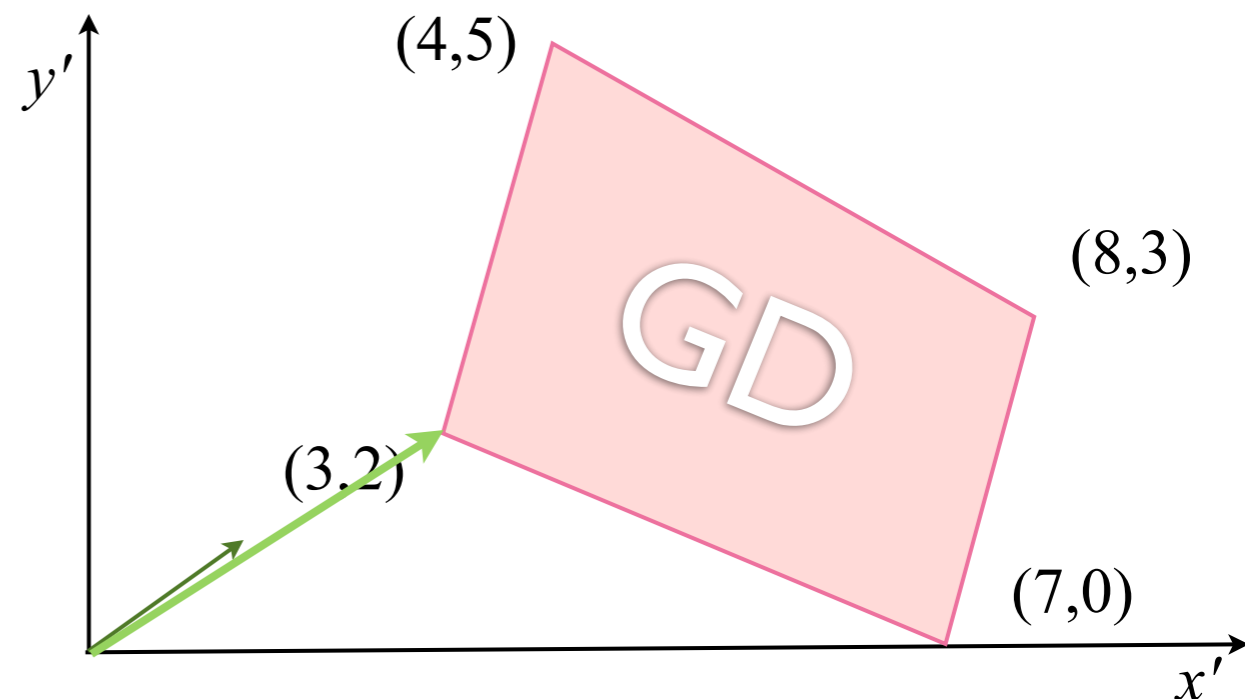
$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$$

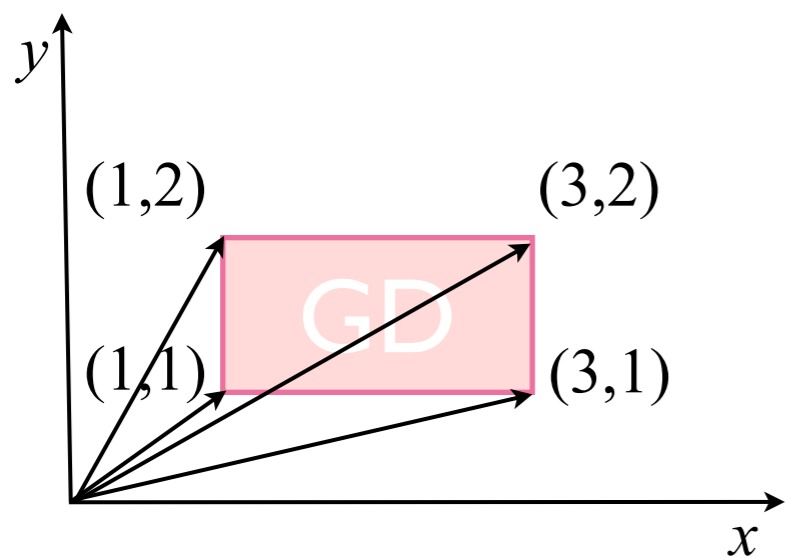


$$\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ -1, & 3 \end{pmatrix}$$

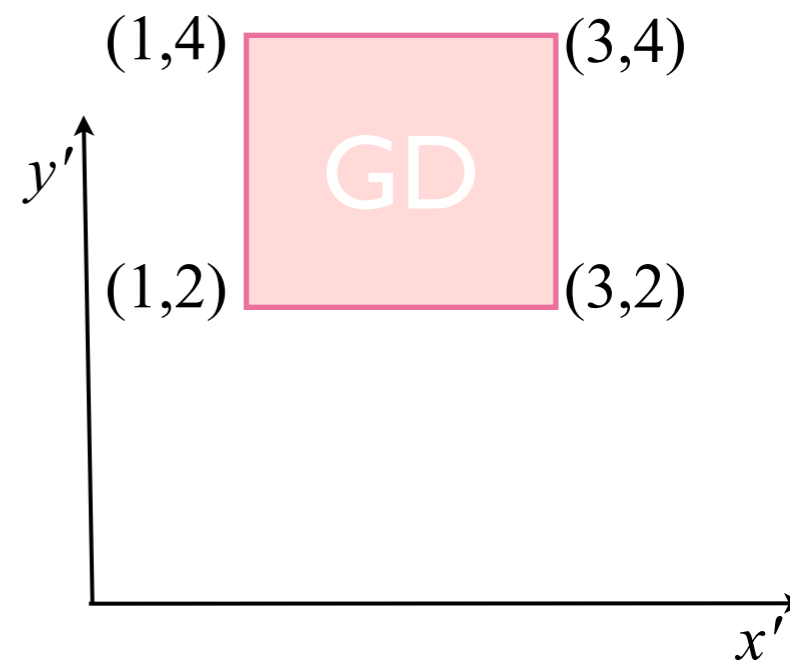


I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

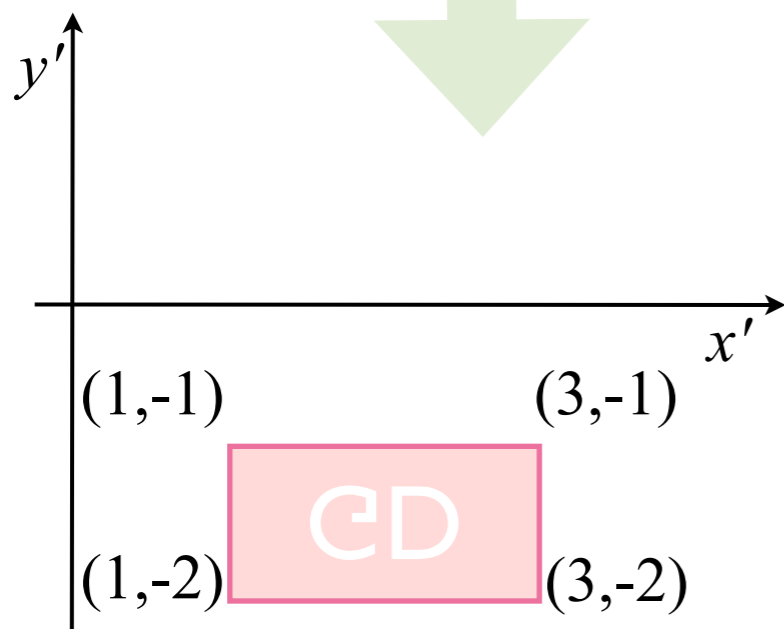
Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



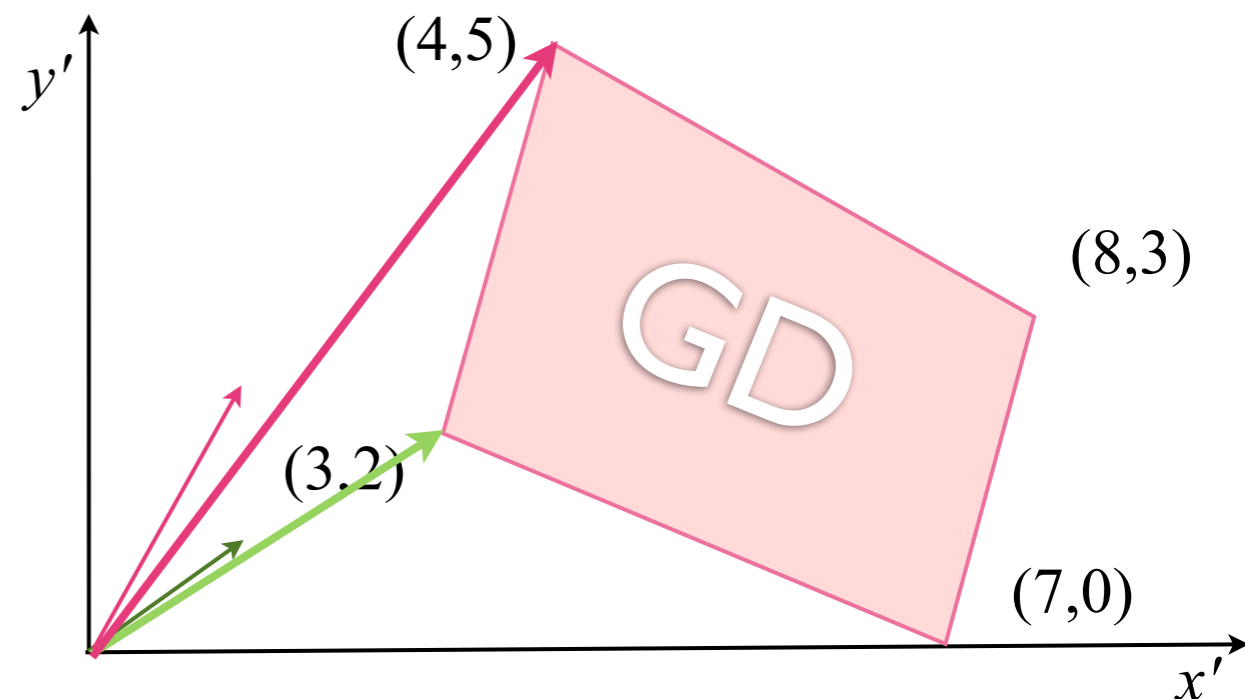
$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$$

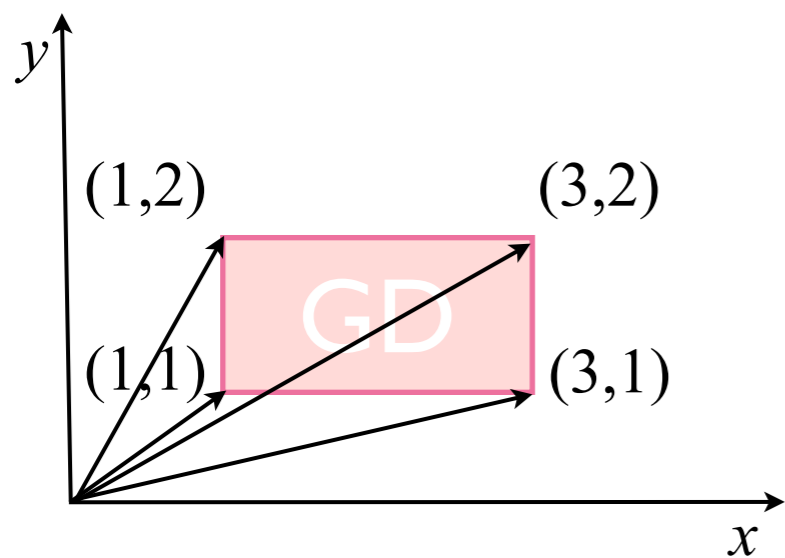


$$\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ -1, & 3 \end{pmatrix}$$

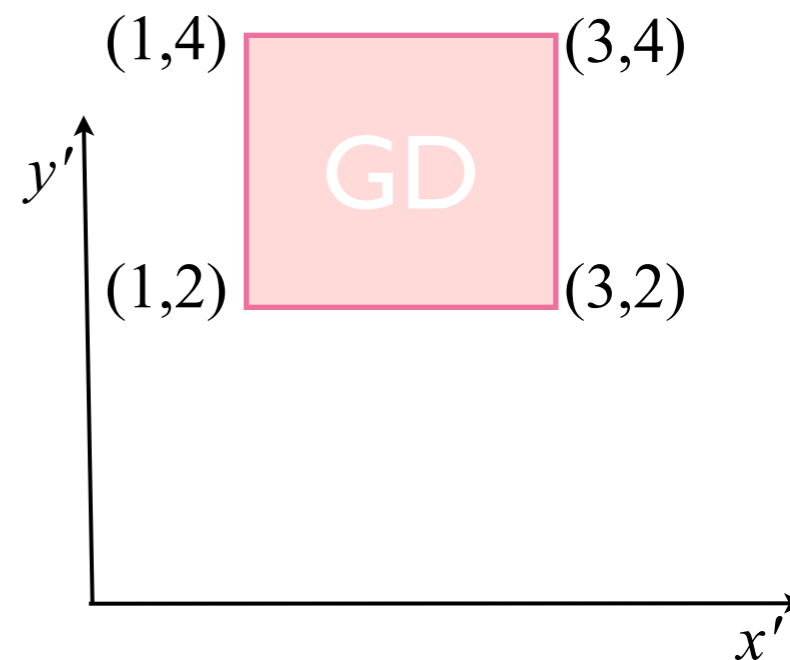


I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

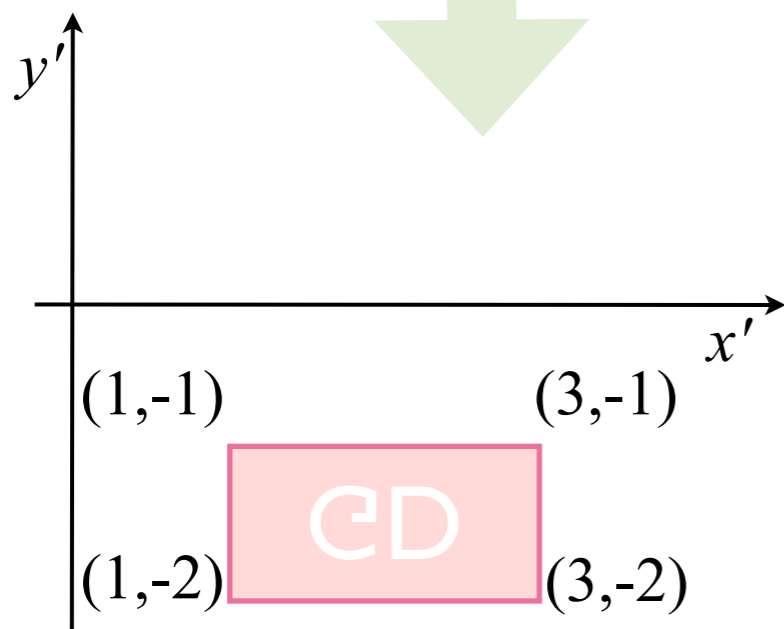
Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



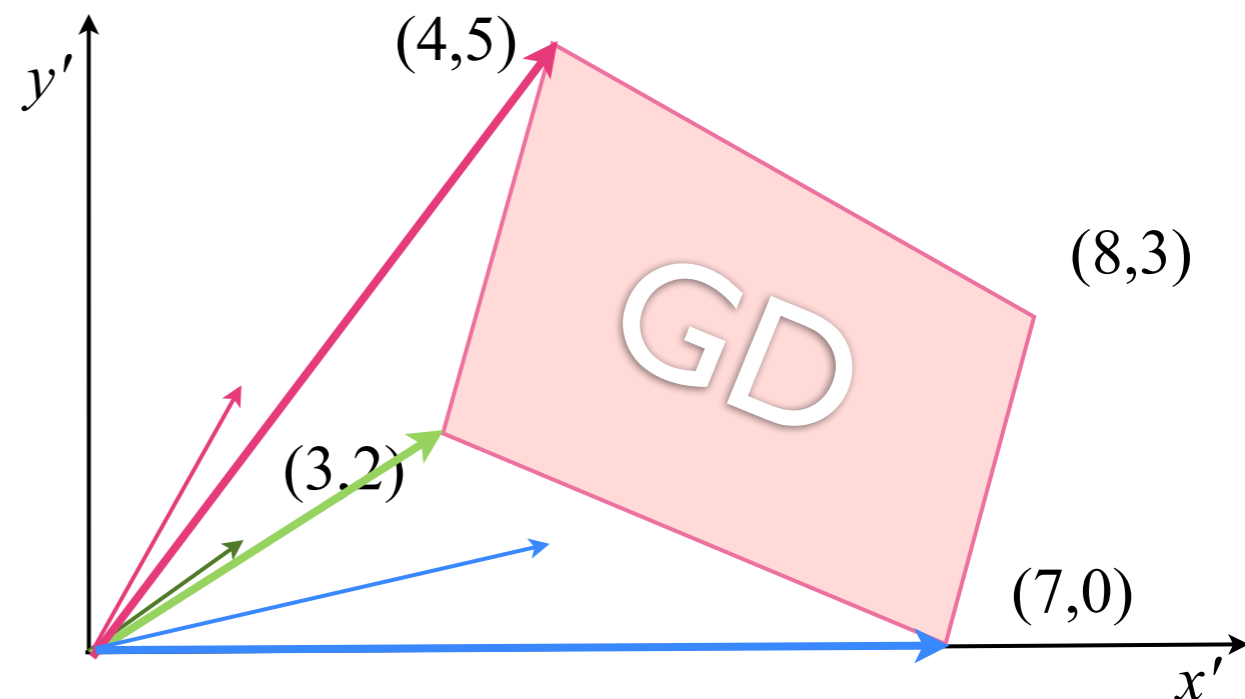
$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$$

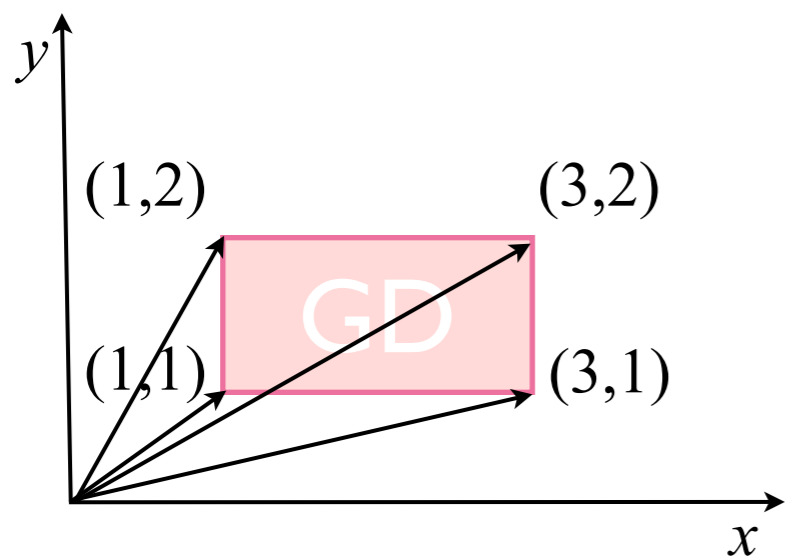


$$\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ -1, & 3 \end{pmatrix}$$

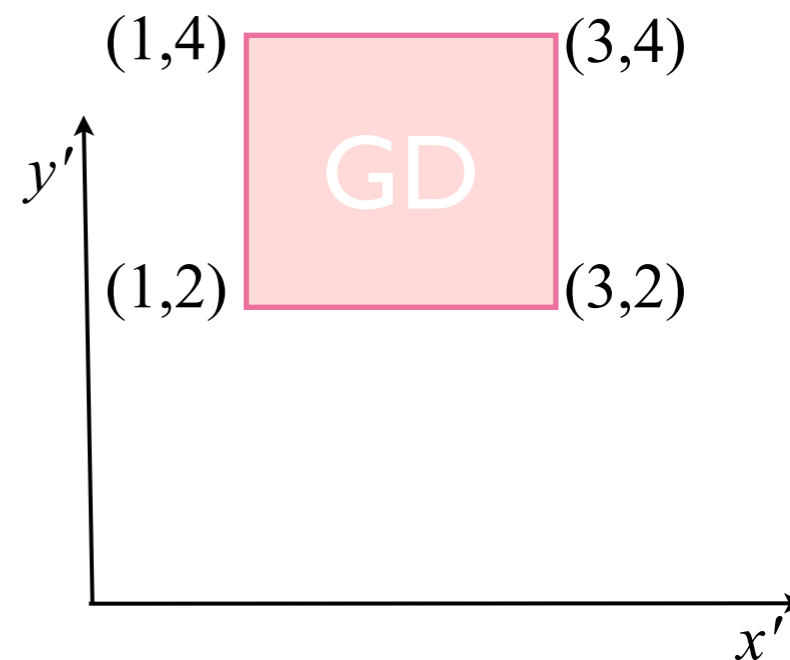


I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

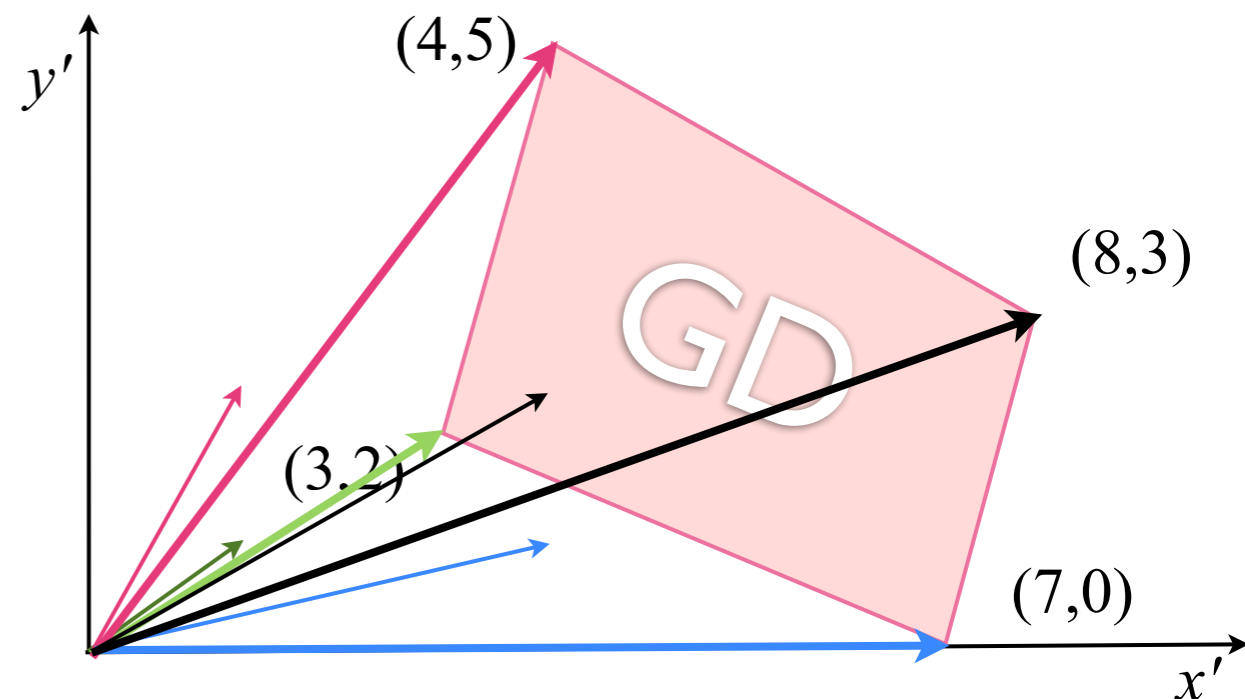
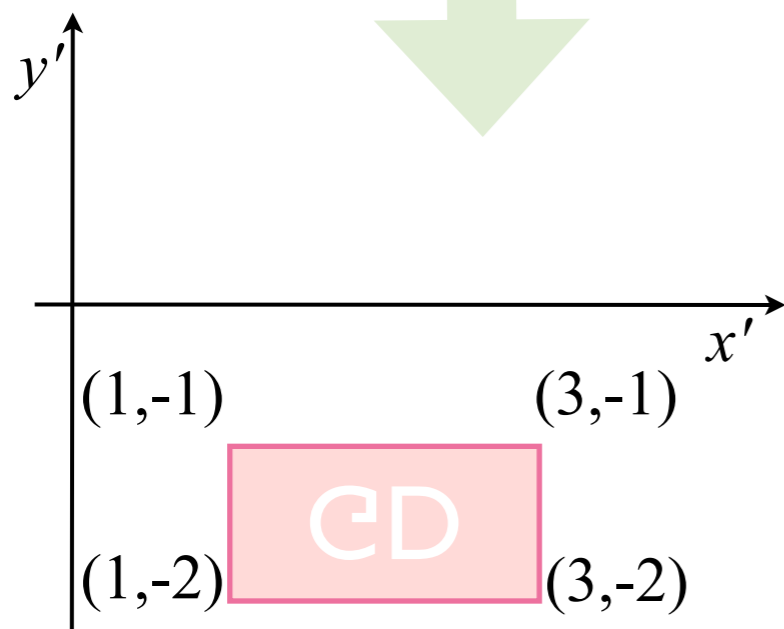


$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 2 \end{pmatrix}$$



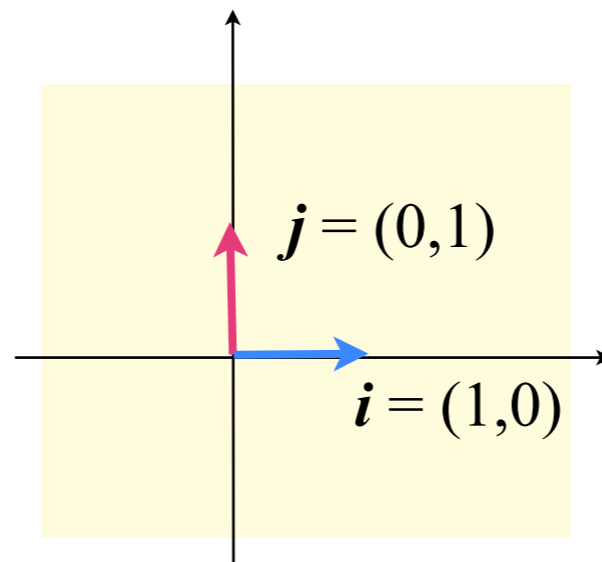
$$\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ -1, & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$$



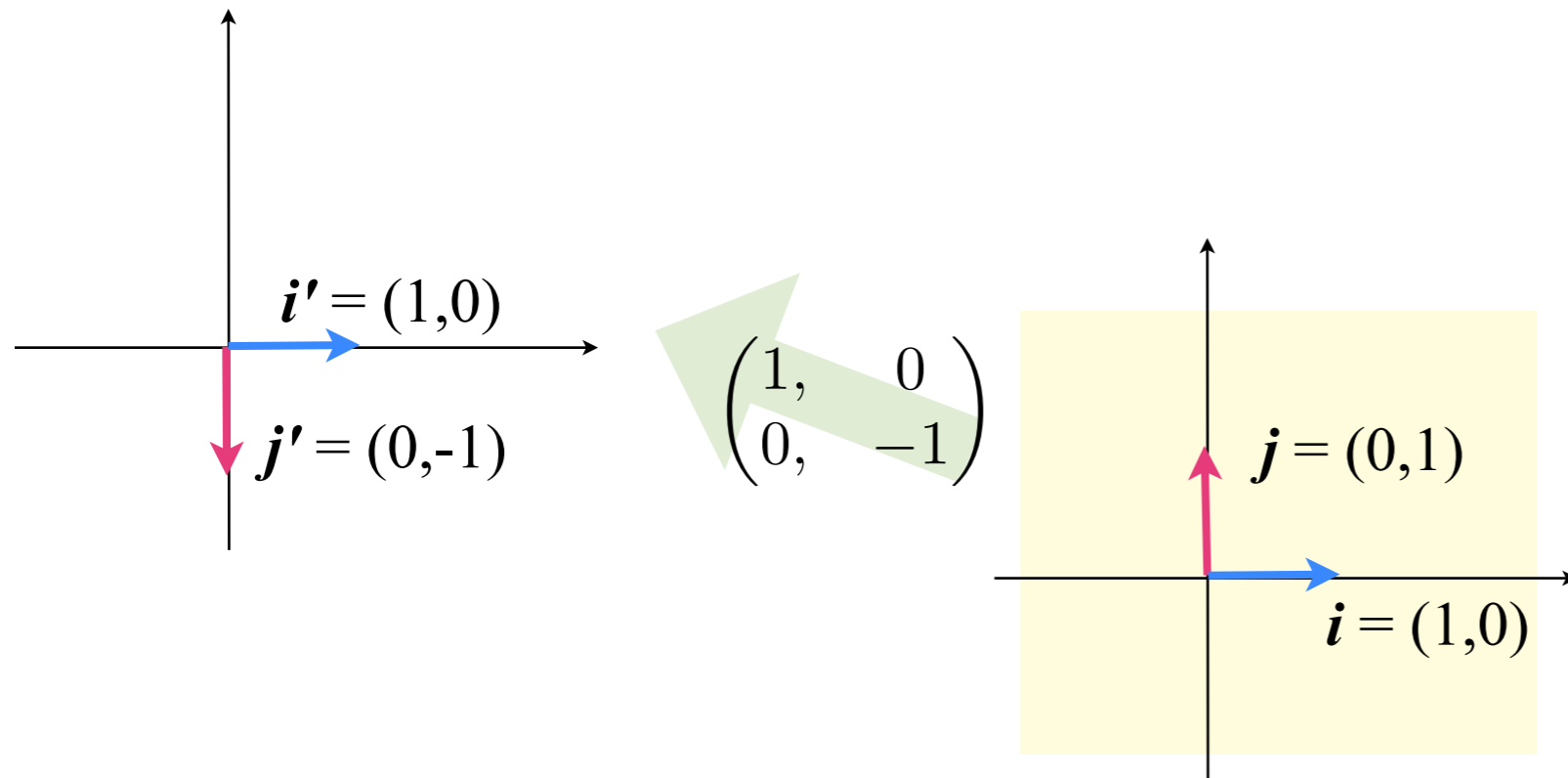
I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



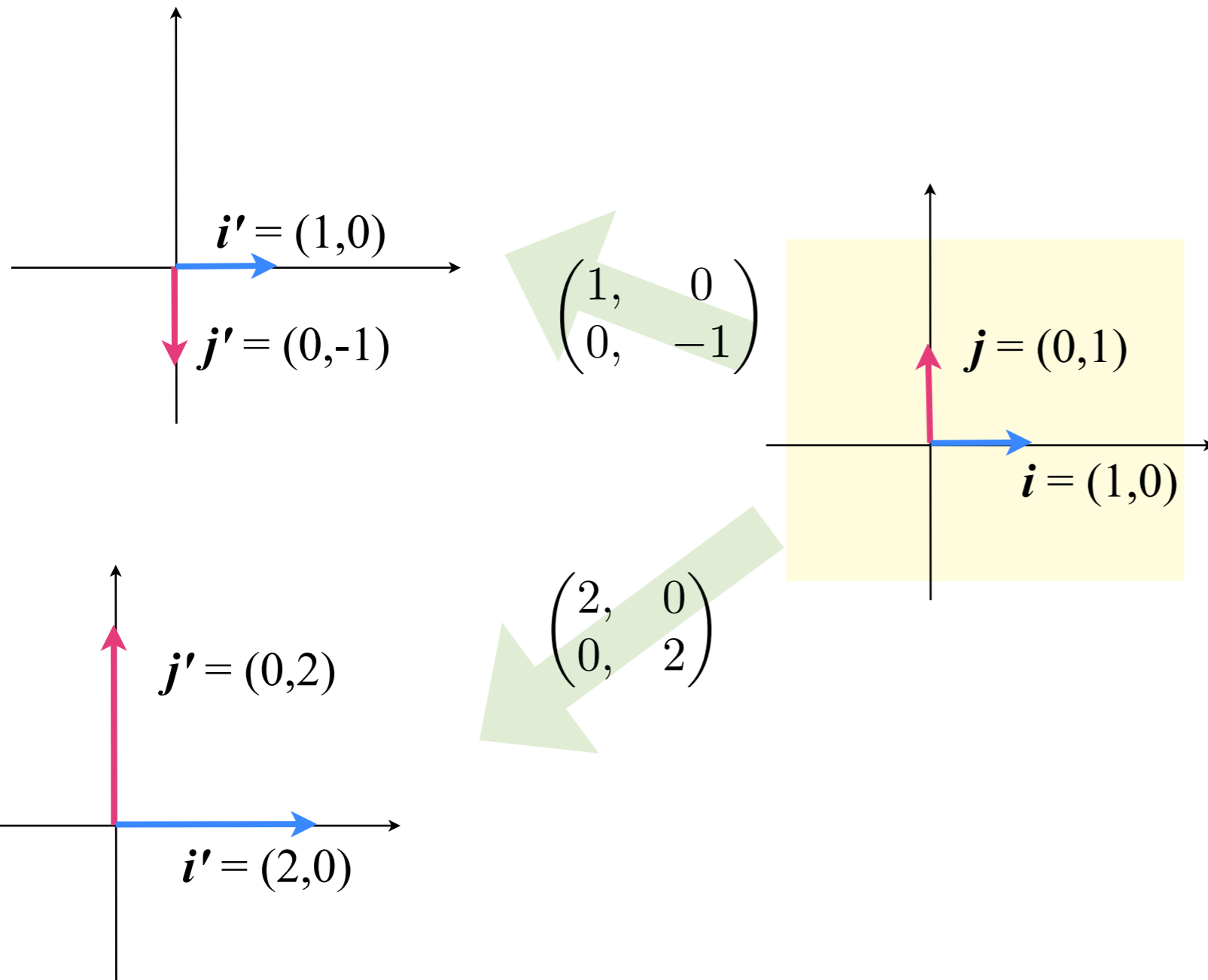
I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



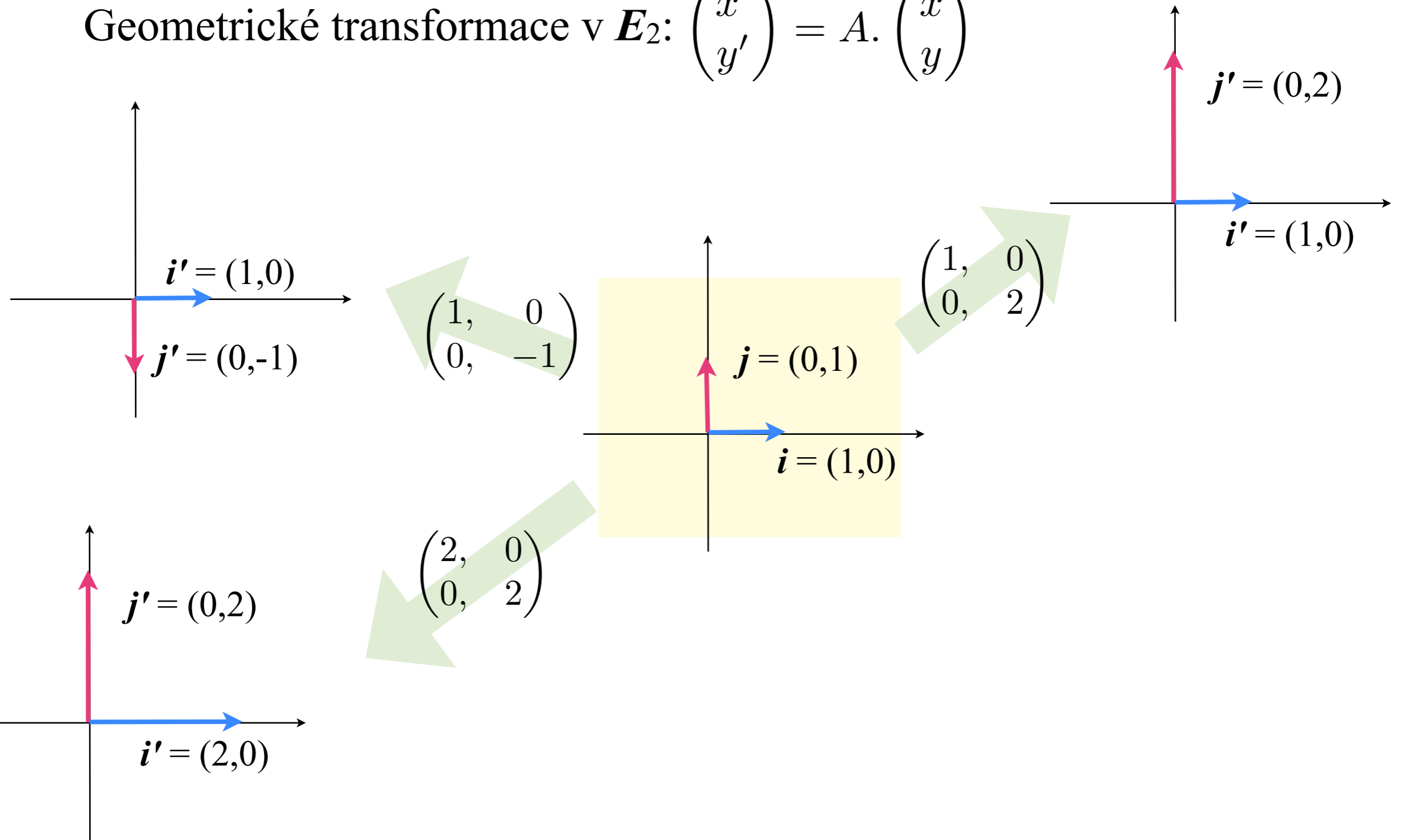
I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



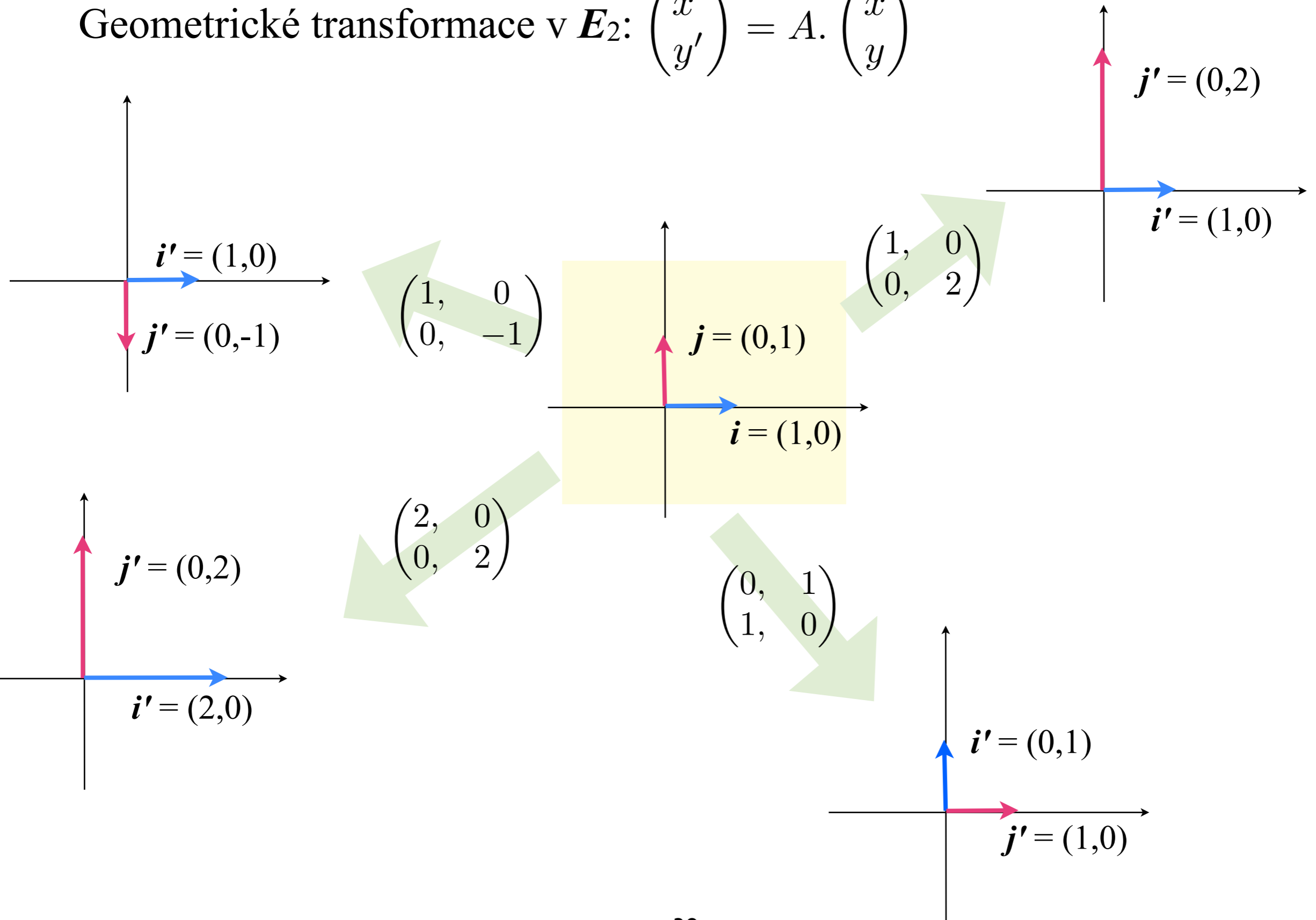
I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



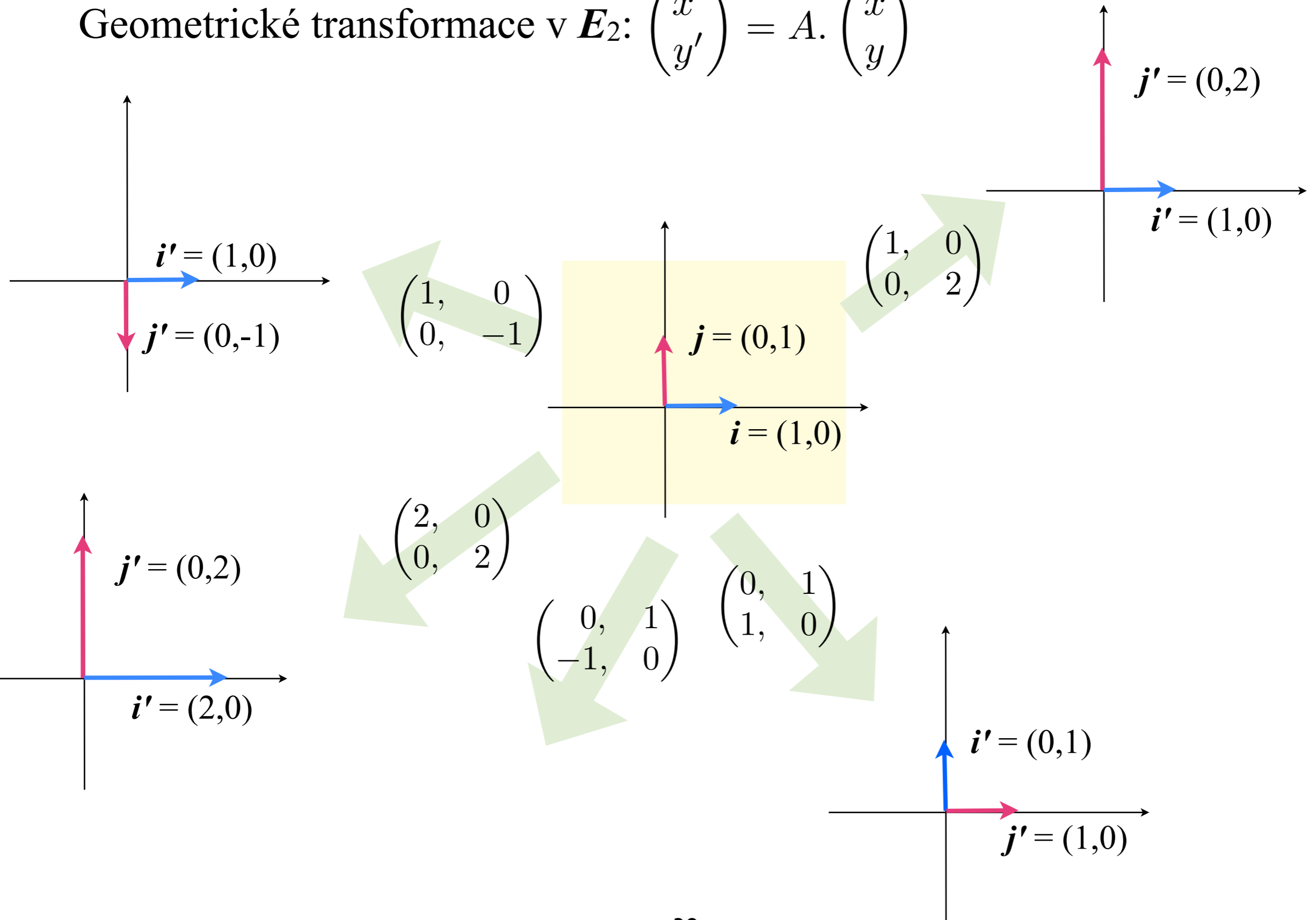
I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



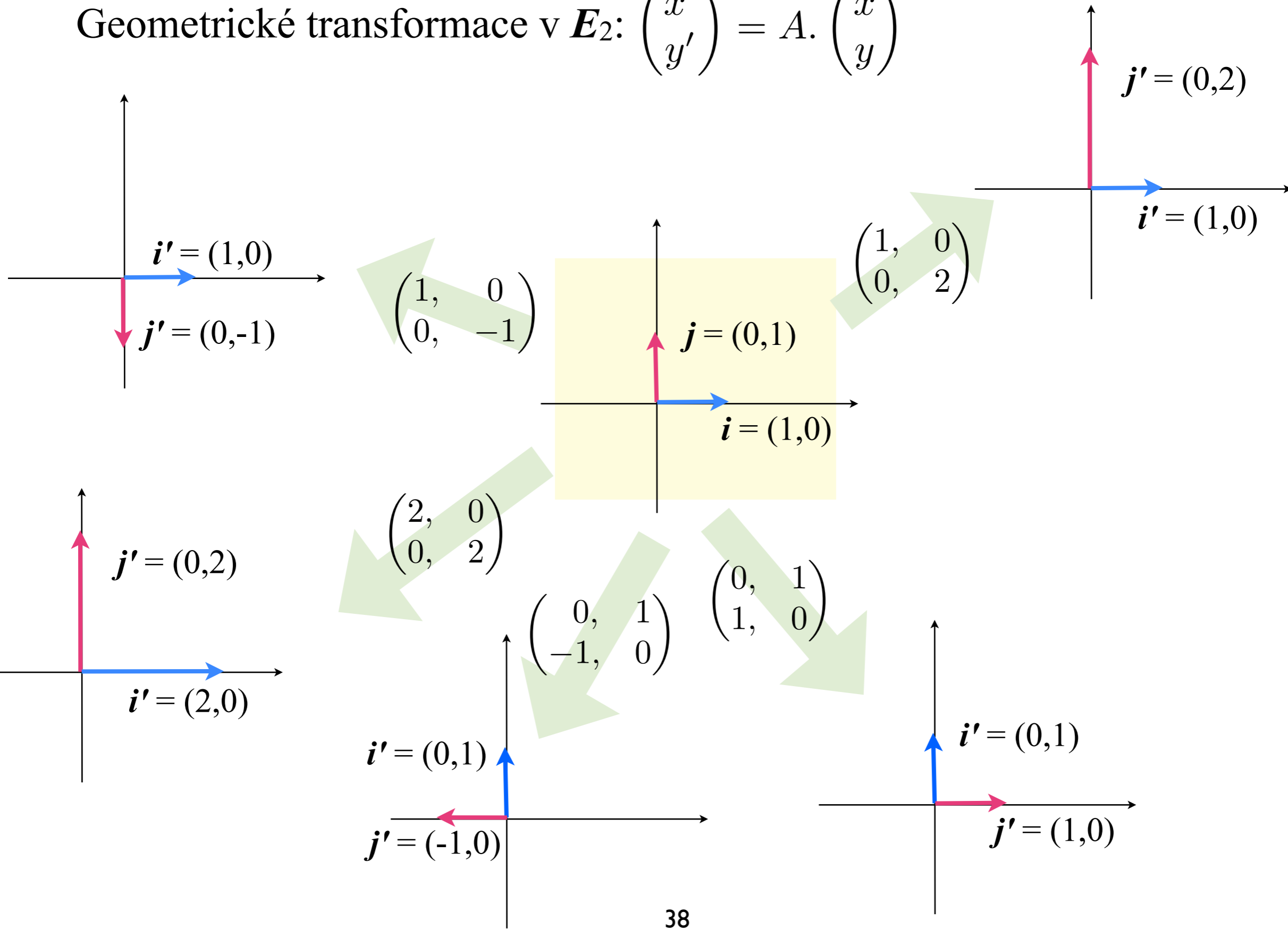
I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



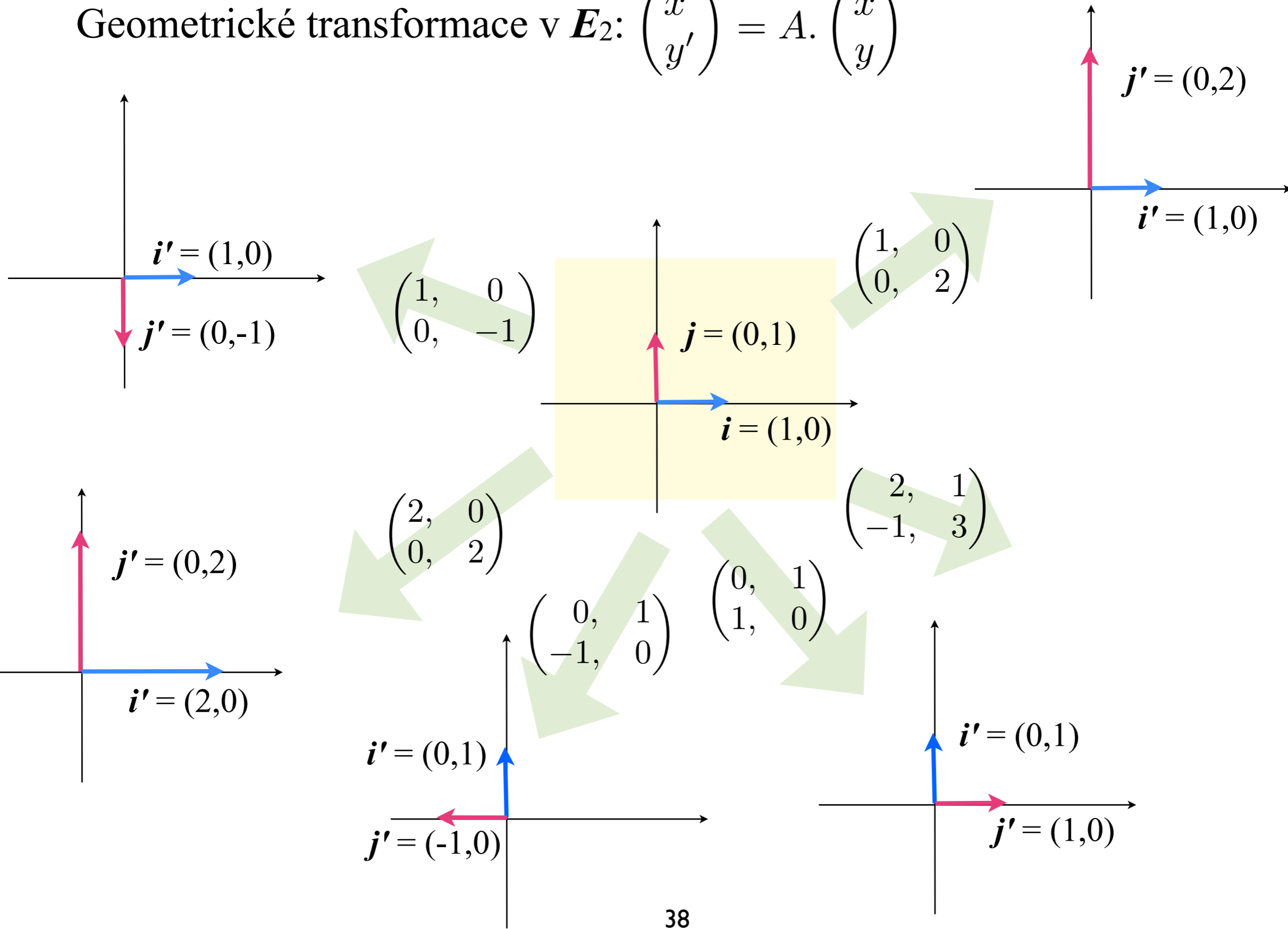
I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



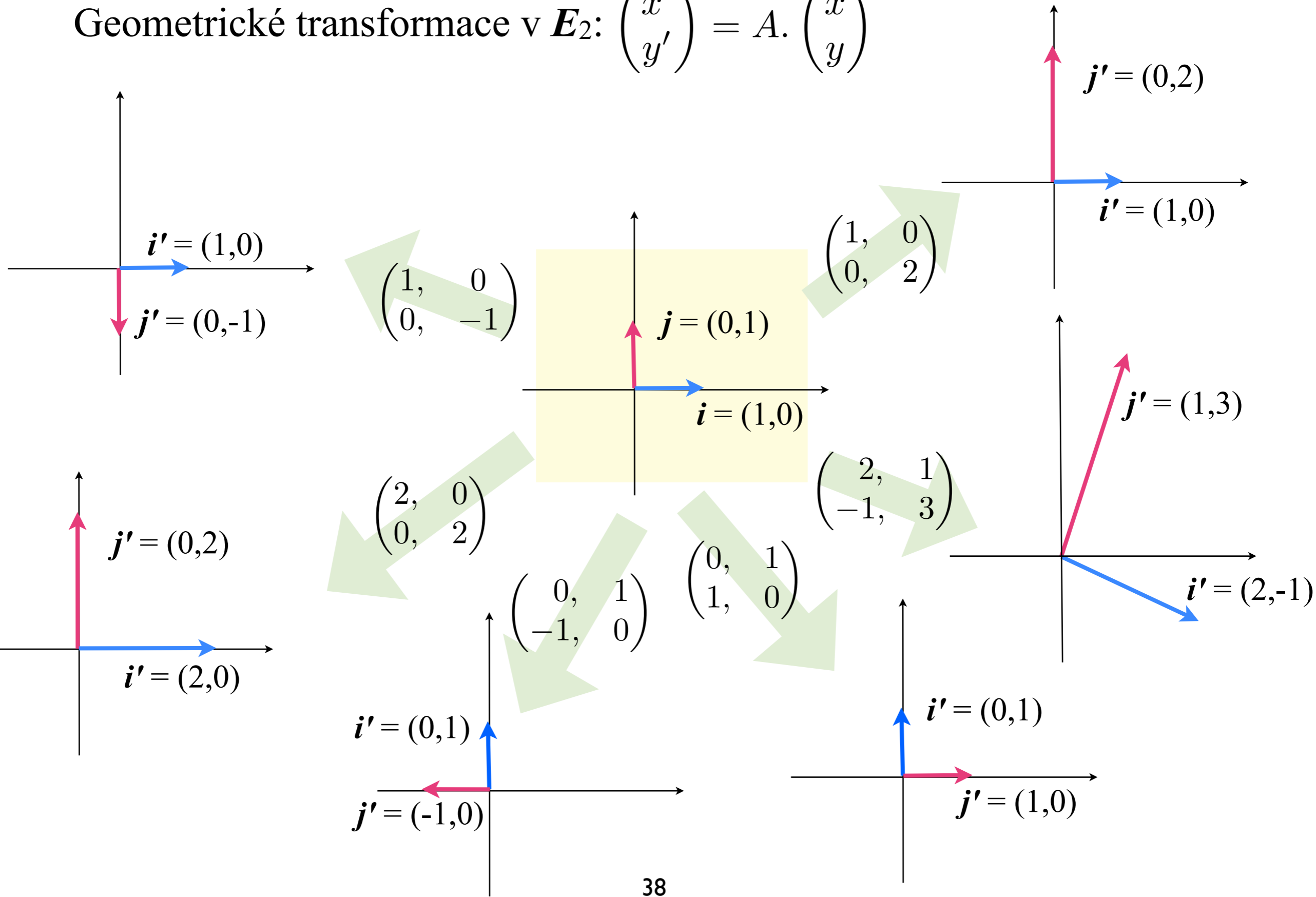
I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- identické zobrazení: $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- identické zobrazení: $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$
- překlopení kolem osy x : $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- identické zobrazení: $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$
- překlopení kolem osy x : $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$
- překlopení kolem osy y : $A = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- identické zobrazení: $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$
- překlopení kolem osy x : $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$
- překlopení kolem osy y : $A = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$
- otočení o úhel ψ doleva: $A = \begin{pmatrix} \cos\psi, & -\sin\psi \\ \sin\psi, & \cos\psi \end{pmatrix}$

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- identické zobrazení: $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$
- překlopení kolem osy x : $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$
- překlopení kolem osy y : $A = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$
- otočení o úhel ψ doleva: $A = \begin{pmatrix} \cos\psi, & -\sin\psi \\ \sin\psi, & \cos\psi \end{pmatrix}$
- překlopení podle osy 1. a 3. kvadrantu: $A = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- identické zobrazení: $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$
- překlopení kolem osy x : $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$
- překlopení kolem osy y : $A = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$
- otočení o úhel ψ doleva: $A = \begin{pmatrix} \cos\psi, & -\sin\psi \\ \sin\psi, & \cos\psi \end{pmatrix}$
- překlopení podle osy 1. a 3. kvadrantu: $A = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$
- překlopení podle osy 2. a 4. kvadrantu: $A = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- identické zobrazení: $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$
- překlopení kolem osy x : $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$
- překlopení kolem osy y : $A = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$
- otočení o úhel ψ doleva: $A = \begin{pmatrix} \cos\psi, & -\sin\psi \\ \sin\psi, & \cos\psi \end{pmatrix}$
- překlopení podle osy 1. a 3. kvadrantu: $A = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$
- překlopení podle osy 2. a 4. kvadrantu: $A = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$
- změna měřítka: $A = \begin{pmatrix} a, & 0 \\ 0, & b \end{pmatrix}$

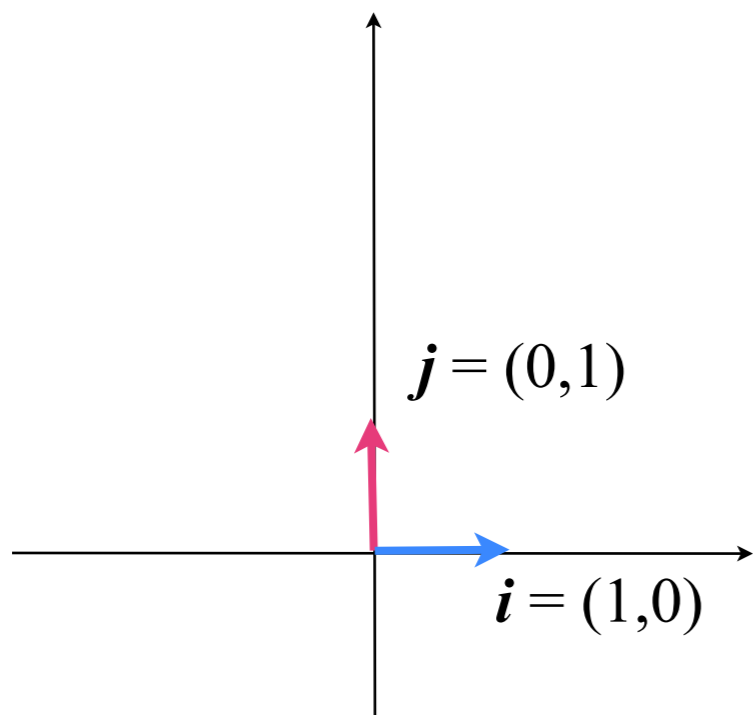
I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- identické zobrazení: $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$
- překlopení kolem osy x: $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$
- překlopení kolem osy y: $A = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$
- otočení o úhel ψ doleva: $A = \begin{pmatrix} \cos\psi, & -\sin\psi \\ \sin\psi, & \cos\psi \end{pmatrix}$
- překlopení podle osy 1. a 3. kvadrantu: $A = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$
- překlopení podle osy 2. a 4. kvadrantu: $A = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$
- změna měřítka: $A = \begin{pmatrix} a, & 0 \\ 0, & b \end{pmatrix}$
- zpětná transformace: $B = A^{-1}$

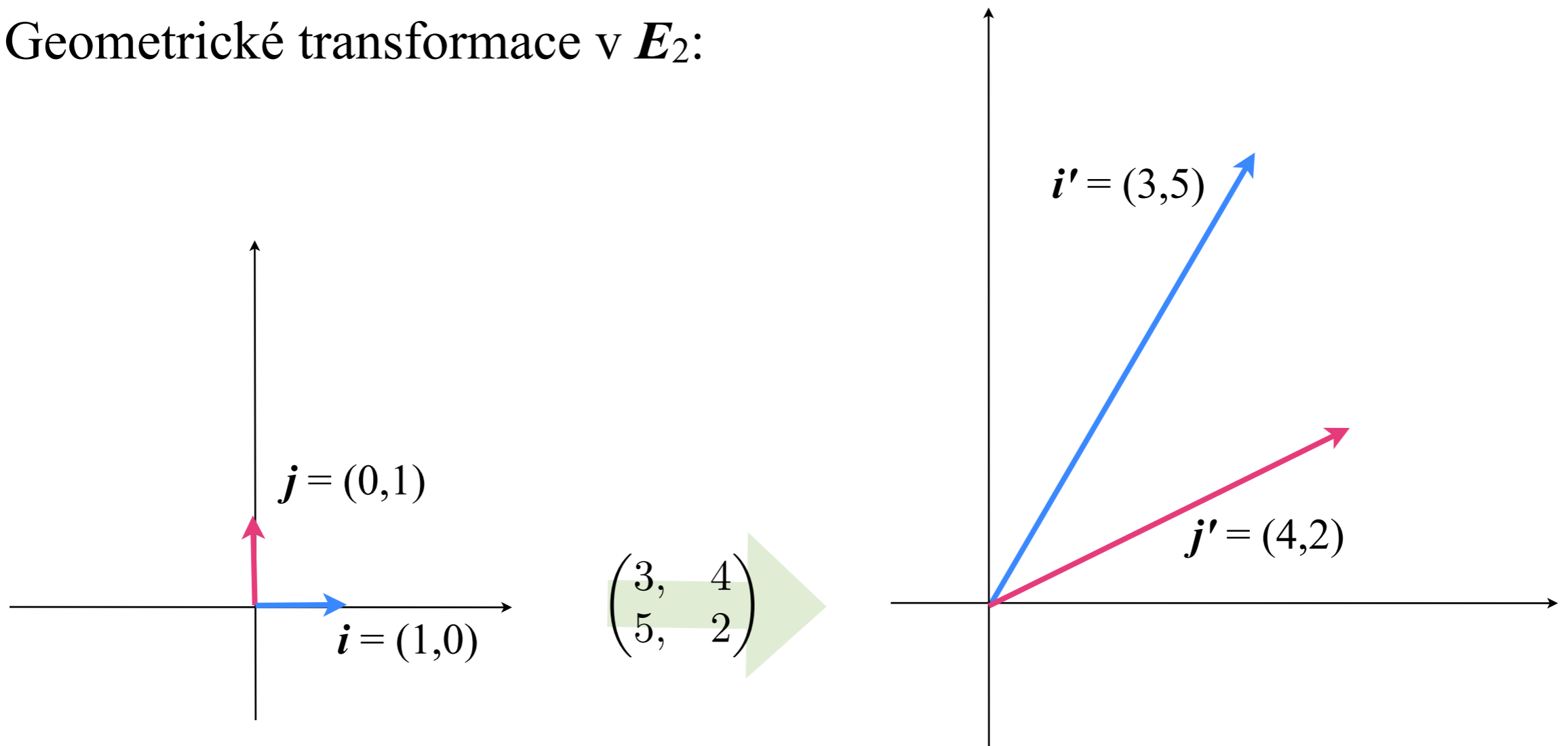
I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 :



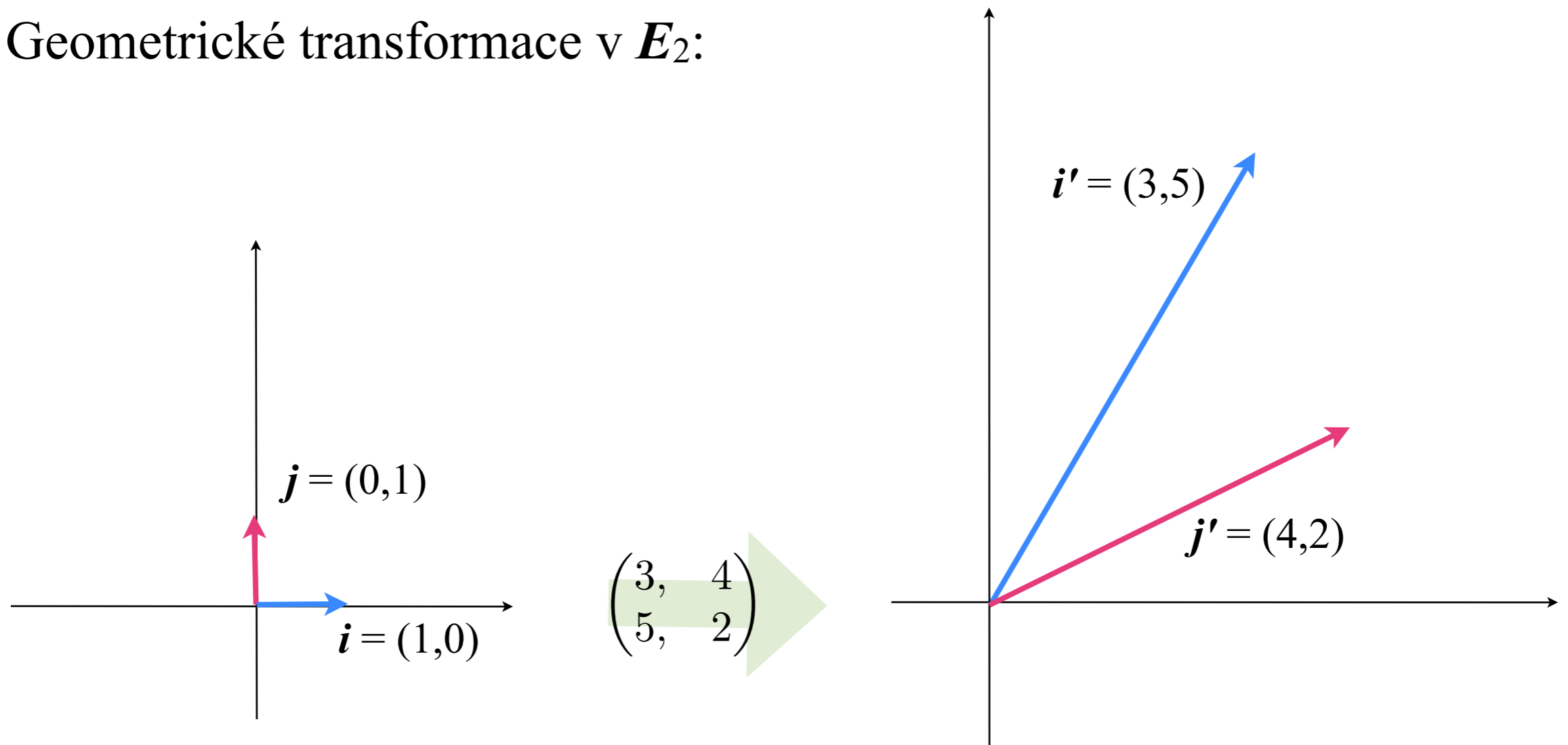
I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 :



I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

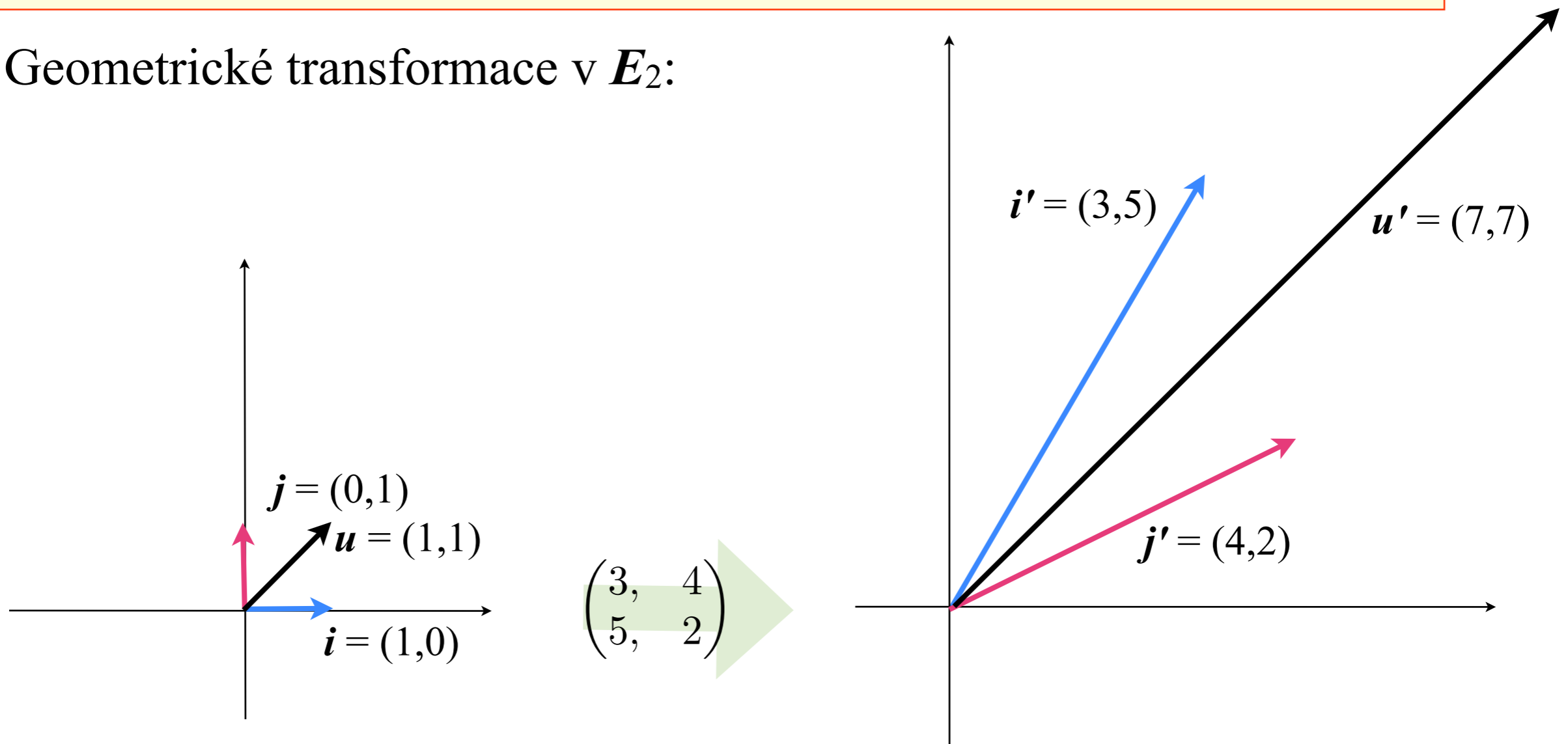
Geometrické transformace v E_2 :



Hledáme vektor \mathbf{u} , pro nějž existuje číslo λ
tak, že platí: $\mathbf{u}' = A \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

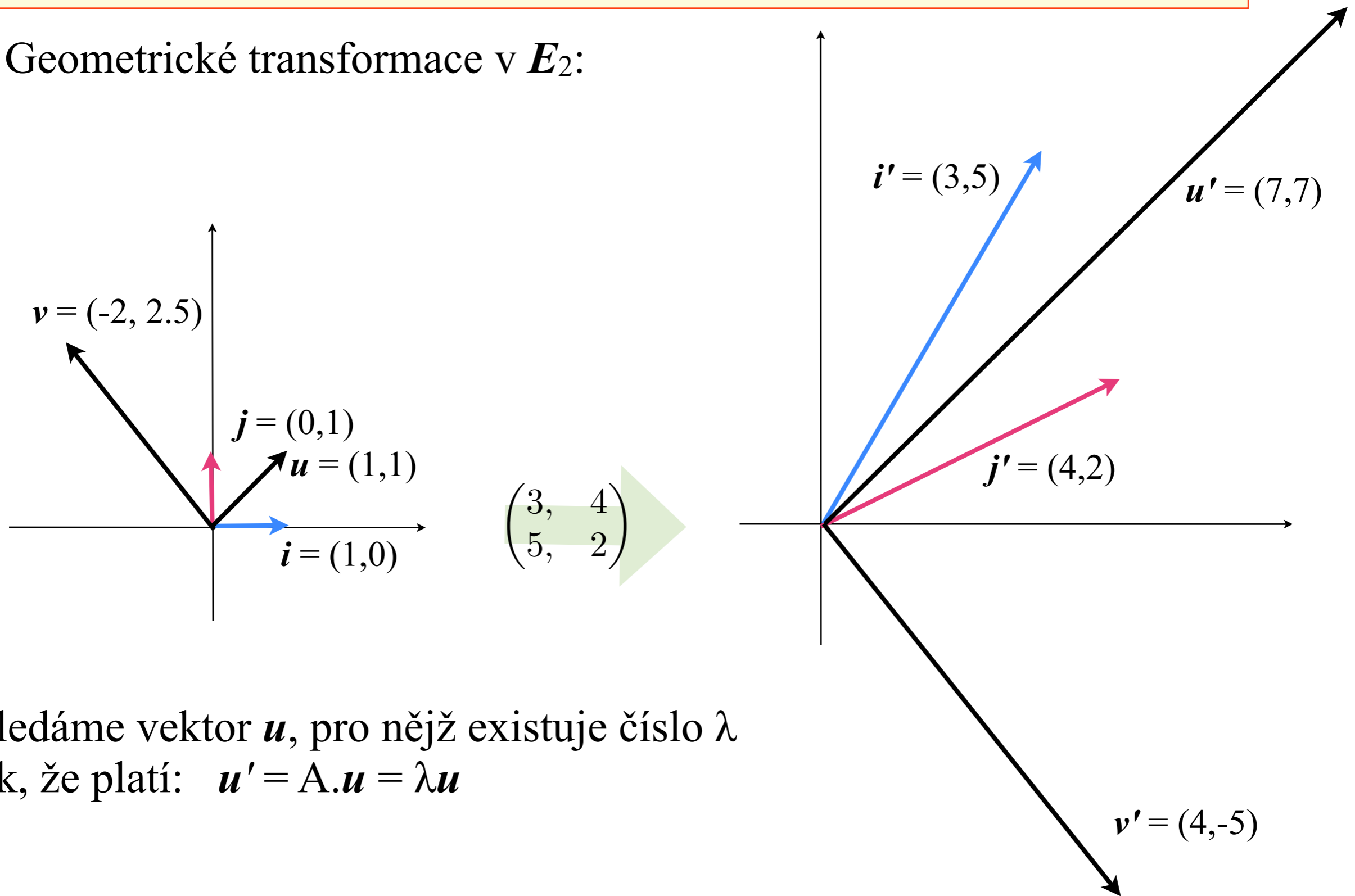
Geometrické transformace v E_2 :



Hledáme vektor u , pro nějž existuje číslo λ tak, že platí: $u' = A \cdot u = \lambda u$

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

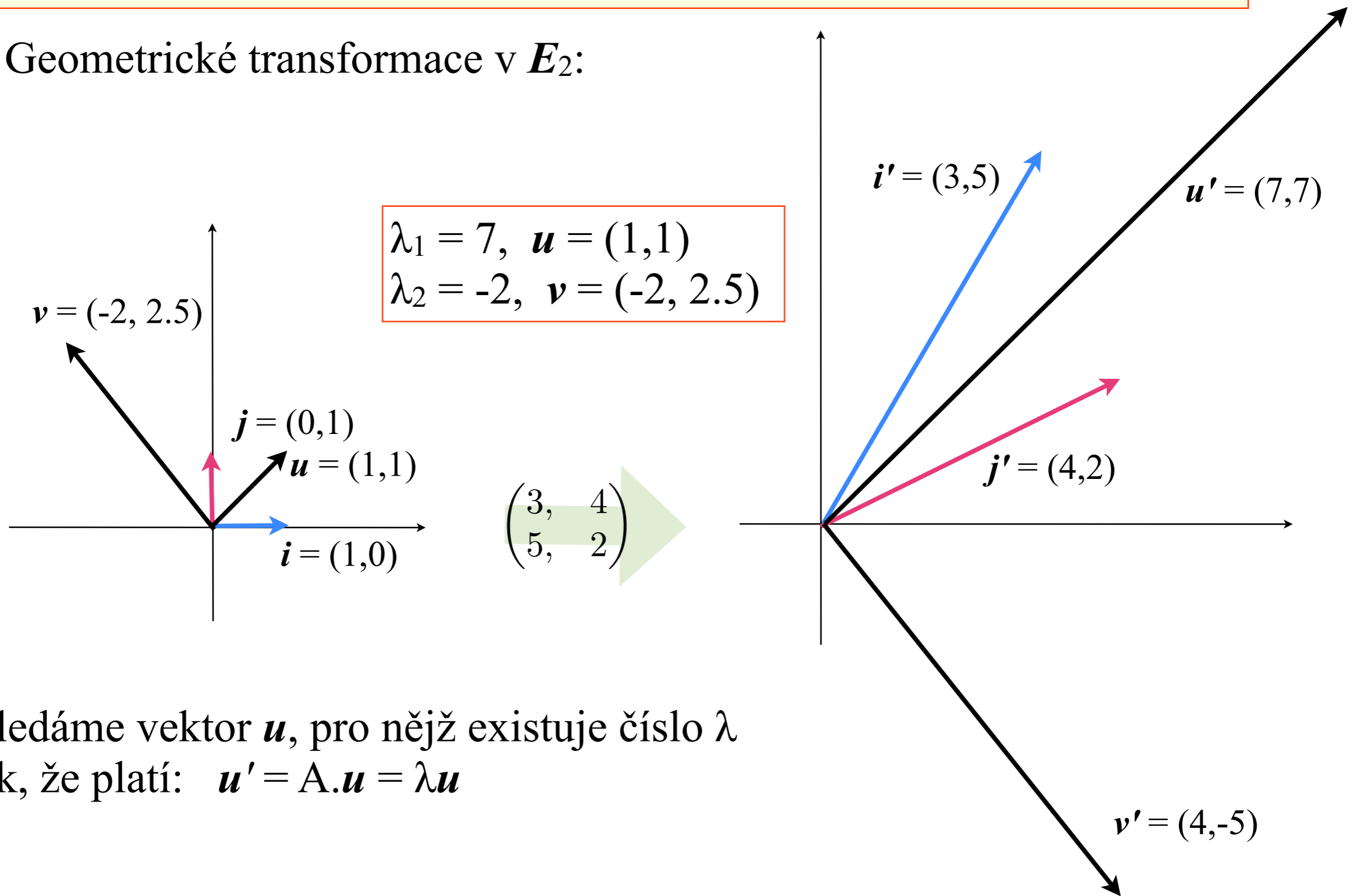
Geometrické transformace v E_2 :



Hledáme vektor u , pro nějž existuje číslo λ tak, že platí: $u' = A \cdot u = \lambda u$

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v E_2 :



Hledáme vektor \mathbf{u} , pro nějž existuje číslo λ tak, že platí: $\mathbf{u}' = A \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Definice: Komplexní číslo λ nazveme *vlastním číslem* čtvercové matice A , existuje-li nenulový vektor \mathbf{u} takový, že platí $A \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$. Vektor \mathbf{u} potom nazýváme *vlastním vektorem* odpovídajícím vlastnímu číslu λ .

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Definice: Komplexní číslo λ nazveme *vlastním číslem* čtvercové matice A , existuje-li nenulový vektor \mathbf{u} takový, že platí $A \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$. Vektor \mathbf{u} potom nazýváme *vlastním vektorem* odpovídajícím vlastnímu číslu λ .

Hledáme vektor \mathbf{u} , pro nějž existuje číslo λ tak, že platí: $A \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Definice: Komplexní číslo λ nazveme *vlastním číslem* čtvercové matice A , existuje-li nenulový vektor \mathbf{u} takový, že platí $A \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$. Vektor \mathbf{u} potom nazýváme *vlastním vektorem* odpovídajícím vlastnímu číslu λ .

Hledáme vektor \mathbf{u} , pro nějž existuje číslo λ tak, že platí: $A \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$

$$(A - \lambda) \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Definice: Komplexní číslo λ nazveme *vlastním číslem* čtvercové matice A , existuje-li nenulový vektor \mathbf{u} takový, že platí $A \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$. Vektor \mathbf{u} potom nazýváme *vlastním vektorem* odpovídajícím vlastnímu číslu λ .

Hledáme vektor \mathbf{u} , pro nějž existuje číslo λ tak, že platí: $A \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$

$$(A - \lambda) \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\det (A - \lambda) = 0$$

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Definice: Komplexní číslo λ nazveme *vlastním číslem* čtvercové matice A , existuje-li nenulový vektor \mathbf{u} takový, že platí $A \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$. Vektor \mathbf{u} potom nazýváme *vlastním vektorem* odpovídajícím vlastnímu číslu λ .

Hledáme vektor \mathbf{u} , pro nějž existuje číslo λ tak, že platí: $A \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$

$$(A - \lambda) \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\det (A - \lambda) = 0$$

charakteristická rovnice

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Definice: Komplexní číslo λ nazveme *vlastním číslem* čtvercové matice A , existuje-li nenulový vektor \mathbf{u} takový, že platí $A \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$. Vektor \mathbf{u} potom nazýváme *vlastním vektorem* odpovídajícím vlastnímu číslu λ .

Hledáme vektor \mathbf{u} , pro nějž existuje číslo λ tak, že platí: $A \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$

$$(A - \lambda) \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\det (A - \lambda) = 0 \quad \text{charakteristická rovnice}$$

Je-li matice typu $n \times n$, potom má charakteristická rovnice n kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Každému z nich odpovídají vlastní vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ jako řešení soustav rovnic $(A - \lambda_i) \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Definice: Komplexní číslo λ nazveme *vlastním číslem* čtvercové matice A , existuje-li nenulový vektor \mathbf{u} takový, že platí $A \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$. Vektor \mathbf{u} potom nazýváme *vlastním vektorem* odpovídajícím vlastnímu číslu λ .

Hledáme vektor \mathbf{u} , pro nějž existuje číslo λ tak, že platí: $A \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$

$$(A - \lambda) \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

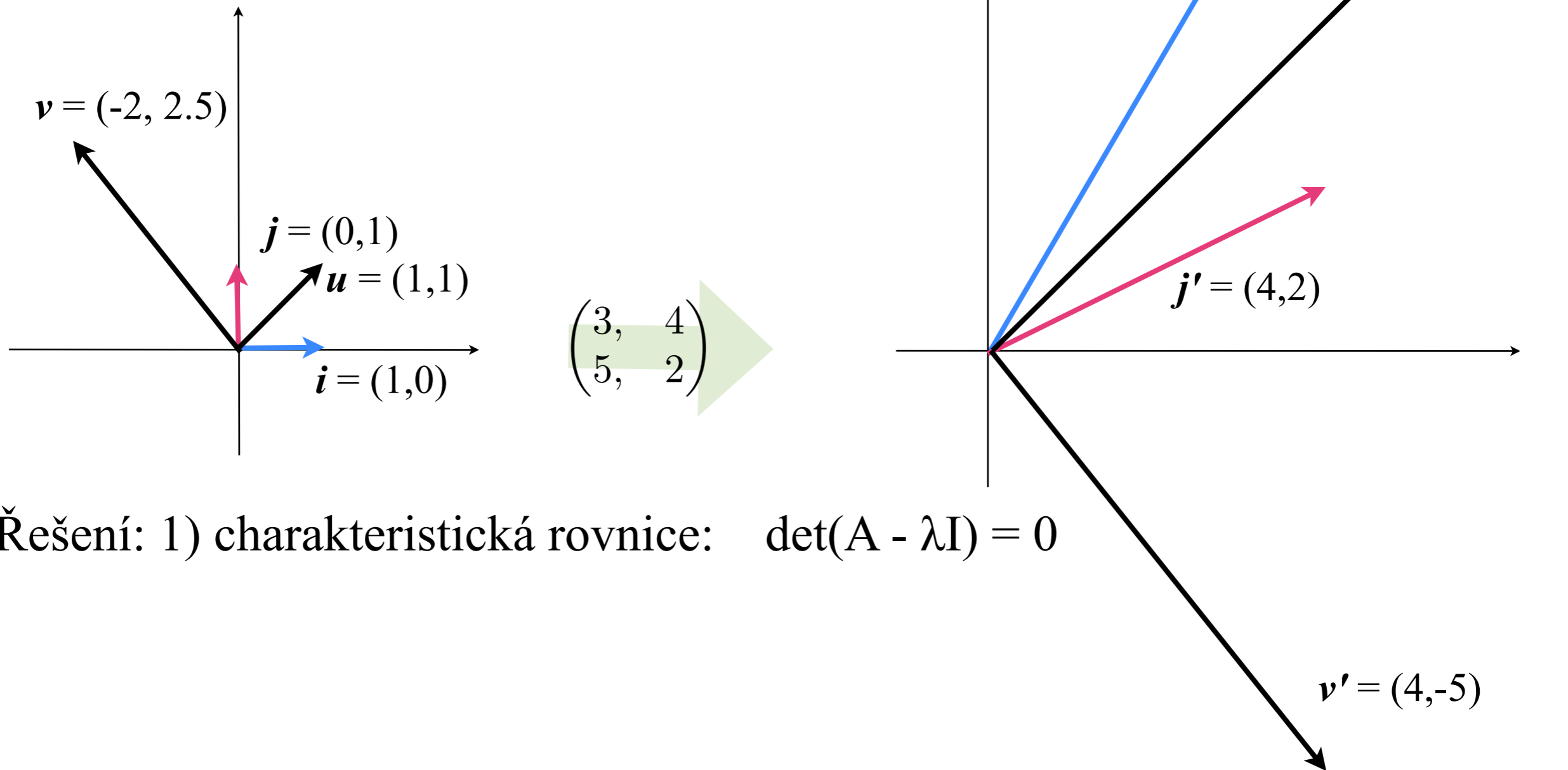
$$\det (A - \lambda) = 0 \quad \text{charakteristická rovnice}$$

Je-li matice typu $n \times n$, potom má charakteristická rovnice n kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Každému z nich odpovídají vlastní vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ jako řešení soustav rovnic $(A - \lambda_i) \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Vlastní čísla a vlastní vektory hledáme obecně jako komplexní. Pokud má matice 2×2 komplexní vlastní čísla (řešení charakteristické rovnice), potom při transformaci souřadnic v \mathbb{R}^2 neexistují vektory, které by zachovávaly směr.

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

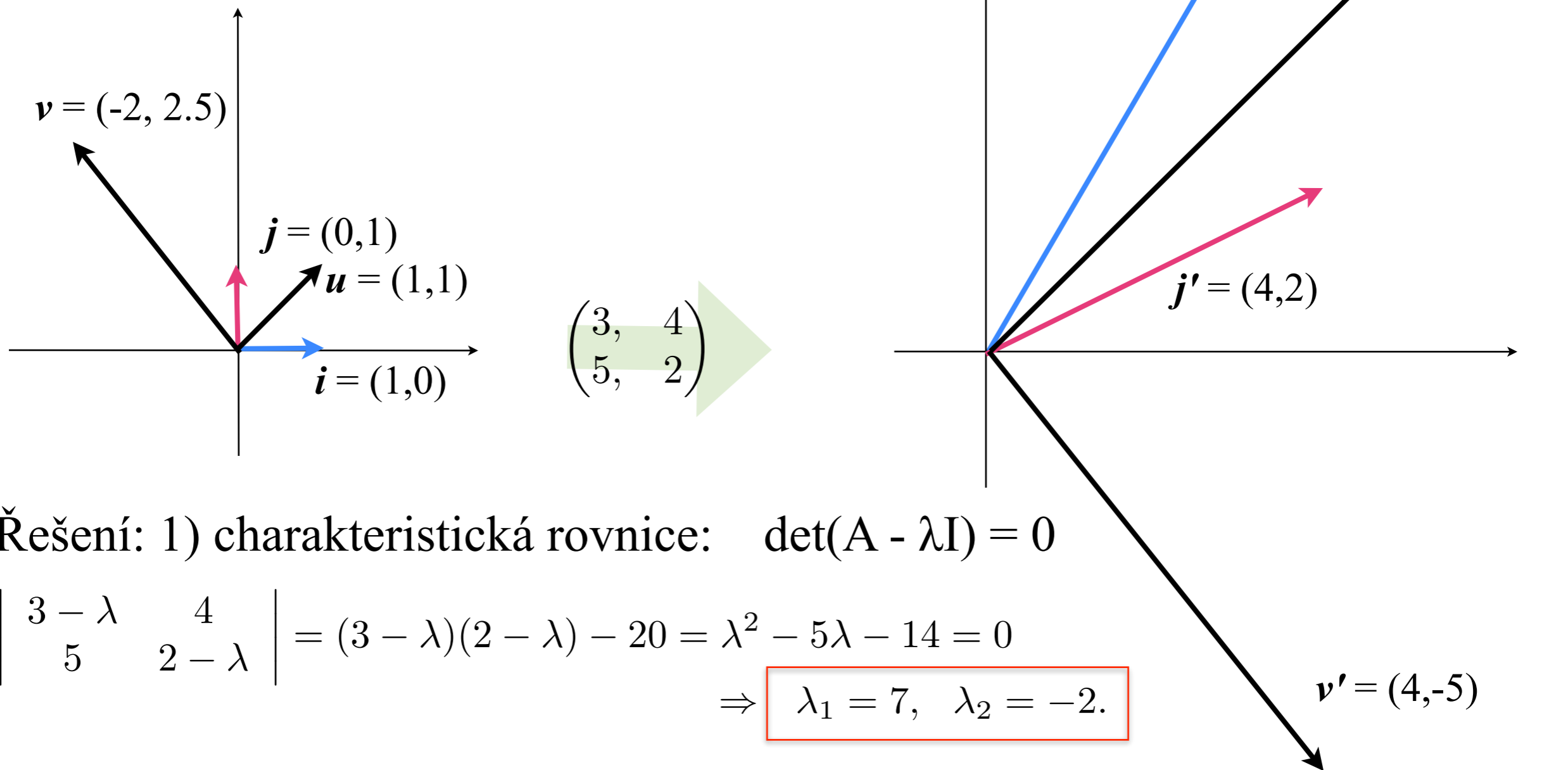
Hledáme vektor \mathbf{u} , pro nějž existuje číslo λ tak, že platí: $\mathbf{u}' = A \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$



Řešení: 1) charakteristická rovnice: $\det(A - \lambda I) = 0$

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Hledáme vektor \mathbf{u} , pro nějž existuje číslo λ tak, že platí: $\mathbf{u}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$



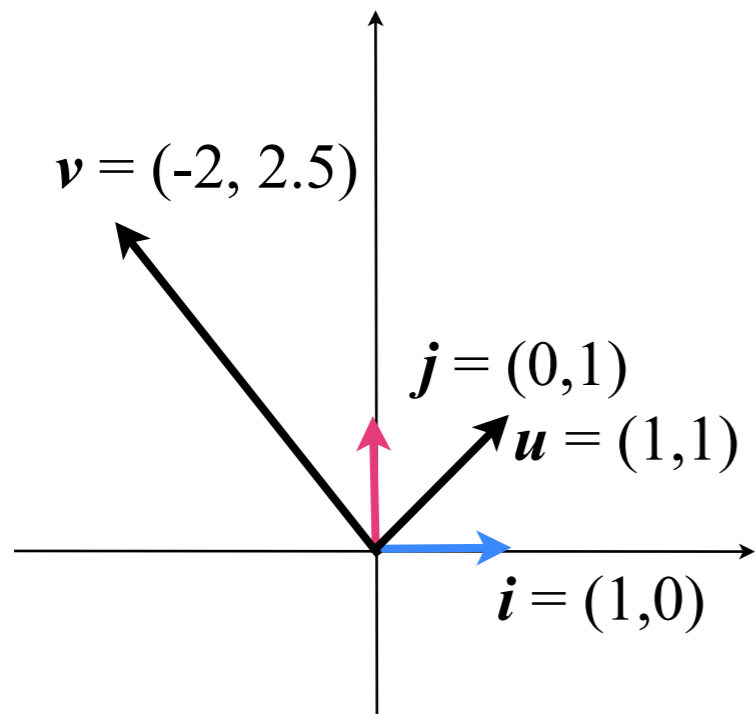
Řešení: 1) charakteristická rovnice: $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(2 - \lambda) - 20 = \lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0$$

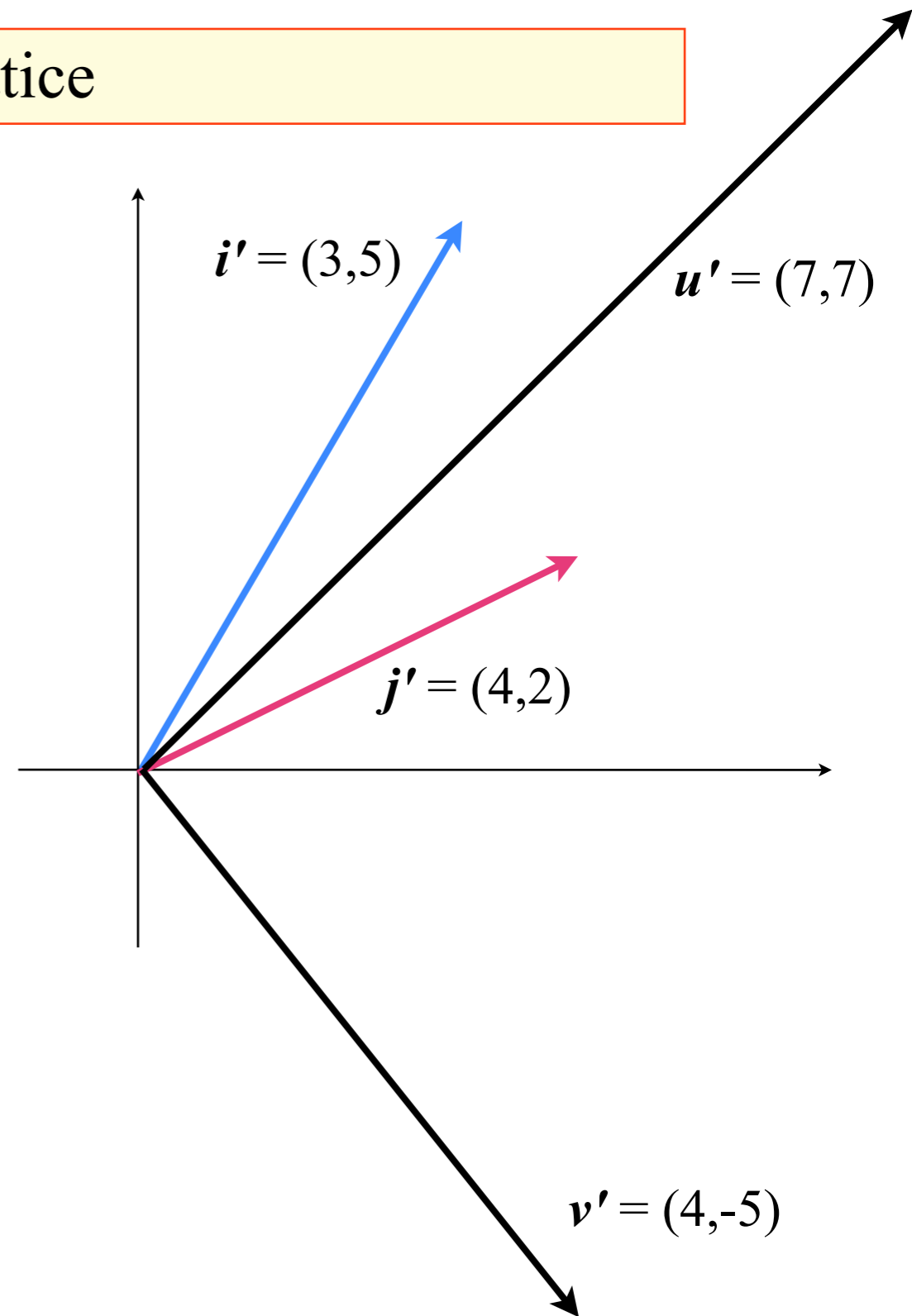
$$\Rightarrow \lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = -2.$$

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Hledáme vektor \mathbf{u} , pro nějž existuje číslo λ tak, že platí: $\mathbf{u}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$



$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

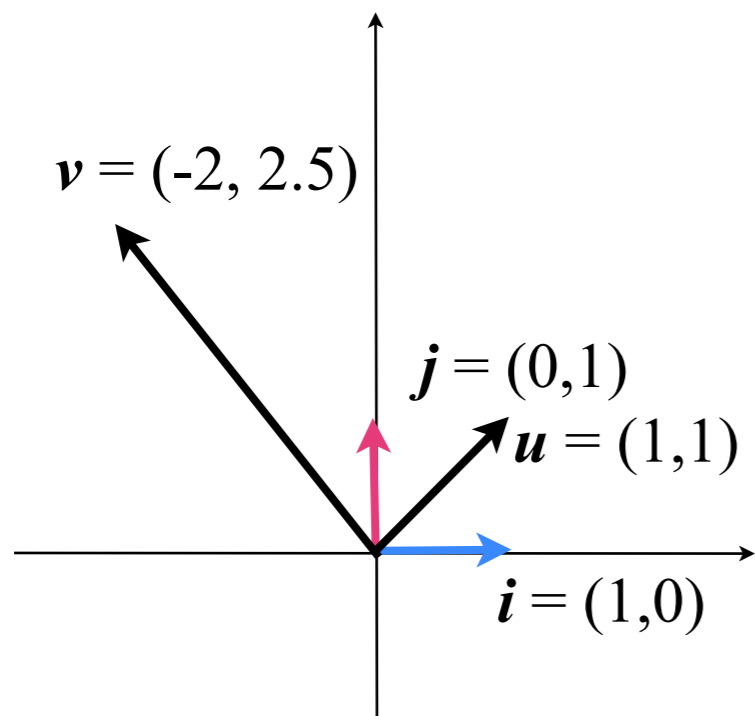


Řešení: 2) vlastní vektory: $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$

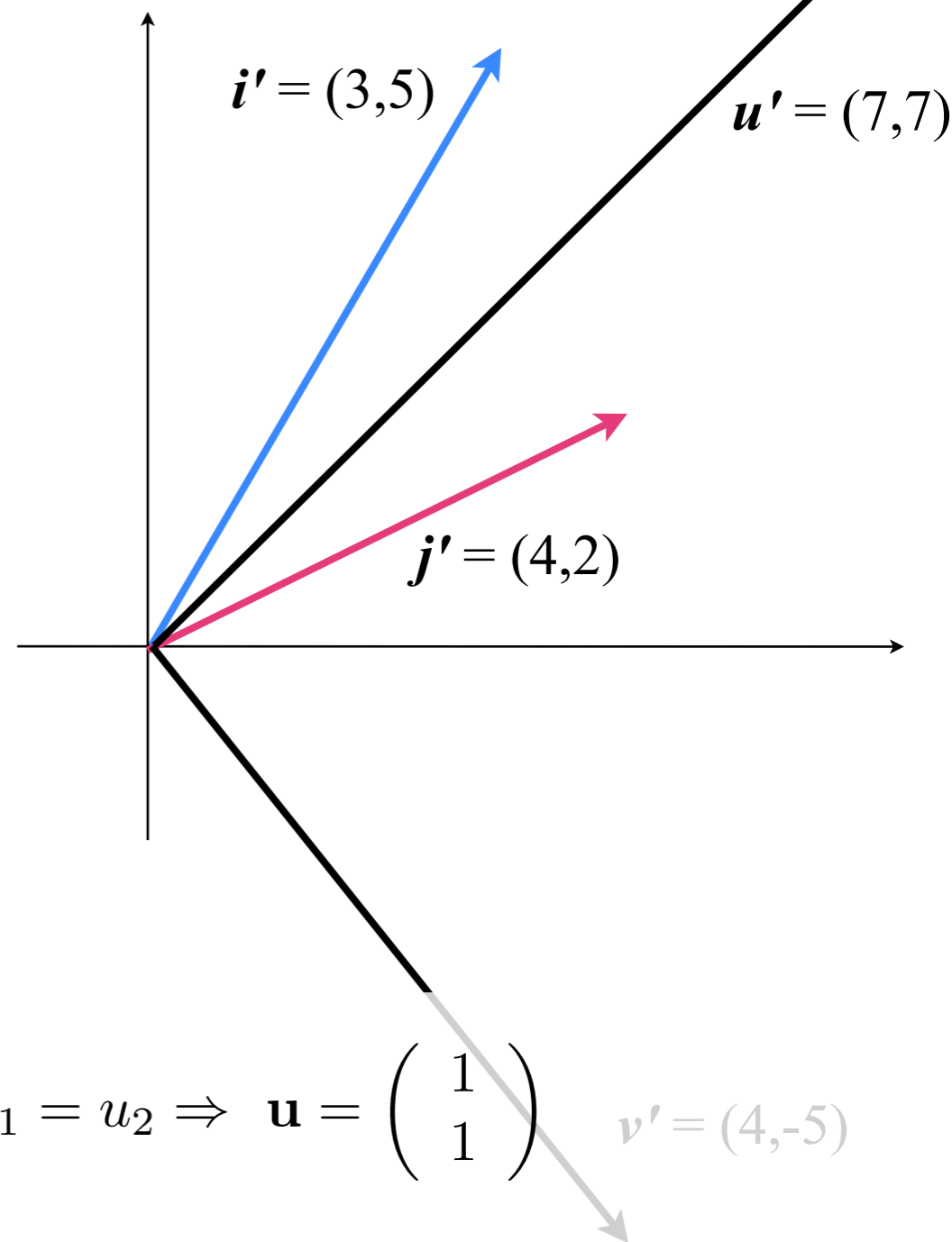
$\lambda_1 = 7$:

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Hledáme vektor \mathbf{u} , pro nějž existuje číslo λ tak, že platí: $\mathbf{u}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$



$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$



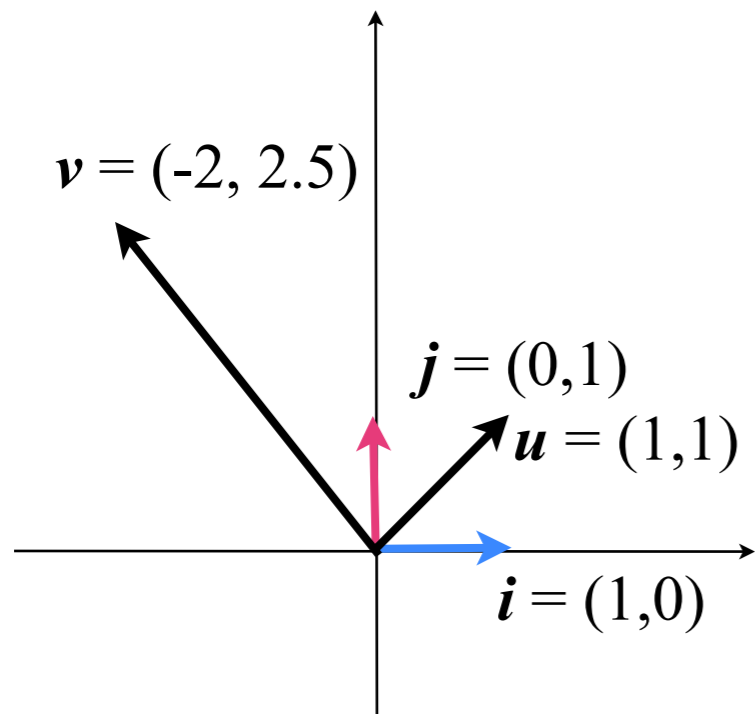
Řešení: 2) vlastní vektory: $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$

$$\lambda_1 = 7:$$

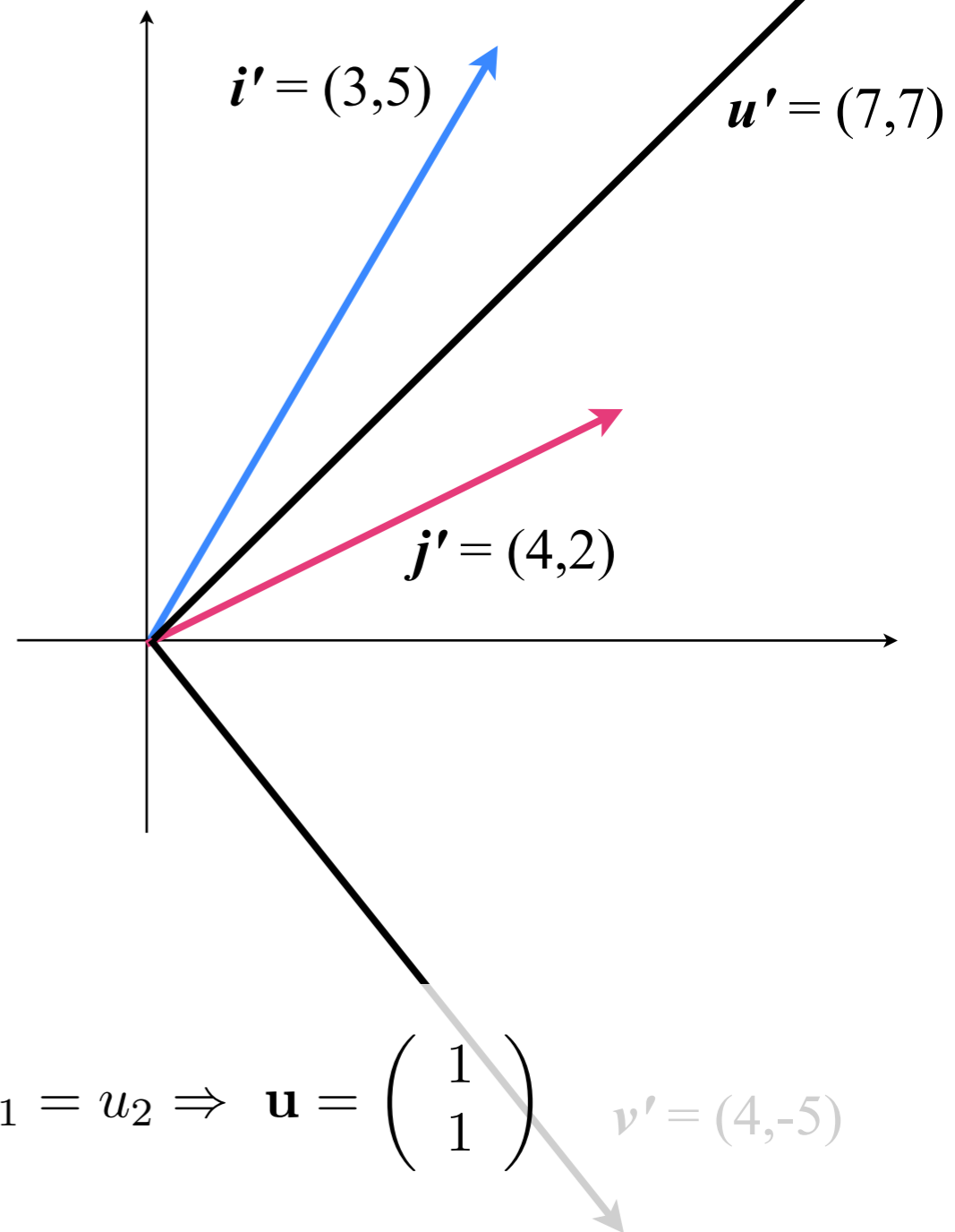
$$\begin{pmatrix} 3 - 7 & 4 \\ 5 & 2 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \sim (-1, 1) \Rightarrow u_1 = u_2 \Rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Hledáme vektor \mathbf{u} , pro nějž existuje číslo λ tak, že platí: $\mathbf{u}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$



$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$



Řešení: 2) vlastní vektory: $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$

$$\lambda_1 = 7:$$

$$\begin{pmatrix} 3 - 7 & 4 \\ 5 & 2 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \sim (-1, 1) \Rightarrow u_1 = u_2 \Rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}' = (4, -5)$$

$$\lambda_2 = -2:$$

$$\begin{pmatrix} 3 + 2 & 4 \\ 5 & 2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \sim (5, 4) \Rightarrow v_2 = -\frac{5}{4}v_1 \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5/2 \end{pmatrix} \text{ pro } v_1 = -2.$$

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice, vlastnosti

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice, vlastnosti

- Vlastní vektory matice A odpovídající různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice, vlastnosti

- Vlastní vektory matice A odpovídající různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé
- Matice A má nulové vlastní číslo právě když je singulární.

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice, vlastnosti

- Vlastní vektory matice A odpovídající různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé
- Matice A má nulové vlastní číslo právě když je singulární.
- Je-li $\lambda_1=(a+ib)$ komplexní vlastní číslo matice A a \mathbf{u}_1 je příslušný vlastní vektor, potom má tato matice i komplexně sdružené vlastní číslo $\lambda_2=(a-ib)$ s vlastním vektorem \mathbf{u}_2 komplexně sdruženým k \mathbf{u}_1 .

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice, vlastnosti

- Vlastní vektory matice A odpovídající různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé
- Matice A má nulové vlastní číslo právě když je singulární.
- Je-li $\lambda_1=(a+ib)$ komplexní vlastní číslo matice A a \mathbf{u}_1 je příslušný vlastní vektor, potom má tato matice i komplexně sdružené vlastní číslo $\lambda_2=(a-ib)$ s vlastním vektorem \mathbf{u}_2 komplexně sdruženým k \mathbf{u}_1 .
- Je-li λ vlastním číslem matice A spolu s vlastním vektorem \mathbf{u} , potom λ^2 je vlastním číslem matice $A^2 = A \cdot A$ se stejným vlastním vektorem \mathbf{u} .

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice, vlastnosti

- Vlastní vektory matice A odpovídající různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé
- Matice A má nulové vlastní číslo právě když je singulární.
- Je-li $\lambda_1=(a+ib)$ komplexní vlastní číslo matice A a \mathbf{u}_1 je příslušný vlastní vektor, potom má tato matice i komplexně sdružené vlastní číslo $\lambda_2=(a-ib)$ s vlastním vektorem \mathbf{u}_2 komplexně sdruženým k \mathbf{u}_1 .
- Je-li λ vlastním číslem matice A spolu s vlastním vektorem \mathbf{u} , potom λ^2 je vlastním číslem matice $A^2 = A \cdot A$ se stejným vlastním vektorem \mathbf{u} .
- Je-li λ vlastním číslem matice A spolu s vlastním vektorem \mathbf{u} , potom $1/\lambda$ je vlastním číslem matice A^{-1} se stejným vlastním vektorem \mathbf{u} .

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice, vlastnosti

- Vlastní vektory matice A odpovídající různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé
- Matice A má nulové vlastní číslo právě když je singulární.
- Je-li $\lambda_1=(a+ib)$ komplexní vlastní číslo matice A a \mathbf{u}_1 je příslušný vlastní vektor, potom má tato matice i komplexně sdružené vlastní číslo $\lambda_2=(a-ib)$ s vlastním vektorem \mathbf{u}_2 komplexně sdruženým k \mathbf{u}_1 .
- Je-li λ vlastním číslem matice A spolu s vlastním vektorem \mathbf{u} , potom λ^2 je vlastním číslem matice $A^2 = A \cdot A$ se stejným vlastním vektorem \mathbf{u} .
- Je-li λ vlastním číslem matice A spolu s vlastním vektorem \mathbf{u} , potom $1/\lambda$ je vlastním číslem matice A^{-1} se stejným vlastním vektorem \mathbf{u} .
- Je-li A symetrickou čtvercovou maticí, pak všechna její vlastní čísla jsou reálná. Vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou v tomto případě vzájemně kolmé.