

MATEMATIKA I.

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

II. Základy matematické analýzy

Matematika I.

I. Lineární algebra

II. Základy matematické analýzy

III. Diferenciální počet

IV. Integrální počet

Matematika I.

II. Základy matematické analýzy

- II.1. Číselné množiny, reálná čísla
- II.2. Posloupnosti reálných čísel
- II.3. Limita posloupnosti
- II.4. Funkce jedné reálné proměnné
- II.5. Elementární funkce
- II.6. Limita funkce
- II.7. Spojitost funkce

Matematika I.

II. Základy matematické analýzy

II.1. Číselné množiny, reálná čísla

N	množina přirozených čísel	$1, 2, \dots$
Z	množina celých čísel	$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
P	množina racionálních čísel	$r = \frac{a}{b} \quad a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{N},$
Q	množina iracionálních čísel	$\sqrt{2}, \pi, e^2, \dots$
R	množina reálných čísel	$\mathbf{R} = \mathbf{P} \cup \mathbf{Q} \quad , \quad \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$
C	množina komplexních čísel	$c = a + ib, \quad c = r(\cos\alpha + i.\sin\alpha)$

II.1. Číselné množiny, reálná čísla

Rozšířená množina reálných čísel $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Pro libovolné

$$\begin{array}{lll} x \in \mathbf{R} \text{ v } \mathbf{R}^* \text{ platí:} & x + (+\infty) = +\infty, & x + (-\infty) = -\infty, \\ x - (+\infty) = -\infty, & x - (-\infty) = +\infty, & x / (+\infty) = x / (-\infty) = 0 \end{array}$$

dále:

$$\begin{array}{lll} (+\infty) + (+\infty) = +\infty, & (-\infty) + (-\infty) = -\infty, & (+\infty) - (-\infty) = +\infty, \\ (-\infty) - (+\infty) = -\infty, & & \\ (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, & (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty, & (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{a je-li } x > 0, \text{ potom:} & x \cdot (+\infty) = +\infty, & x \cdot (-\infty) = -\infty, \\ \text{a je-li } x < 0, \text{ potom:} & x \cdot (+\infty) = -\infty, & x \cdot (-\infty) = +\infty \end{array}$$

Neurčité výrazy, které nemají smysl:

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty), \quad (+\infty) + (-\infty), \quad (\pm\infty) / (\pm\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty)$$

II.1. Číselné množiny, intervaly, okolí bodu

otevřený interval v \mathbf{R} : $I = (a,b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$

uzavřený interval v \mathbf{R} : $J = \langle a,b \rangle = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$

sjednocení intervalů v \mathbf{R} : $I \cup J = \{x \in \mathbf{R} : x \in I \vee x \in J\}$

průnik intervalů v \mathbf{R} : $I \cap J = \{x \in \mathbf{R} : x \in I \wedge x \in J\}$

doplňěk intervalu I v \mathbf{R} : $I^c = \{x \in \mathbf{R} : x \notin I\} = (-\infty, a) \cup \langle b, +\infty \rangle$

ε -okolí bodu $x \in \mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

levým ε -okolím bodu $x \in \mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon^-(x) = (x-\varepsilon, x)$

pravým ε -okolím bodu $x \in \mathbf{R}$ je otevřený interval $U_\varepsilon^+(x) = (x, x+\varepsilon)$

prstencové ε -okolí bodu $x \in \mathbf{R}$ je množina $P_\varepsilon(x) - \{x\} = U_\varepsilon^-(x) \cup U_\varepsilon^+(x)$

okolím $+\infty$ je množina $(a, +\infty)$ pro libovolné $a \in \mathbf{R}$

okolím $-\infty$ je množina $(-\infty, a)$ pro libovolné $a \in \mathbf{R}$

II.1. Číselné množiny, extrémní množin

Reálná čísla jsou uspořádána relací \leq :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}: (x \leq y) \text{ nebo } (y \leq x)$$

Je-li $(x \leq y)$ a neplatí $(y \leq x)$, potom je $x < y$ (*ostrá nerovnost*)

$$\forall x \in \mathbf{R}: -\infty < x < +\infty$$

extrémní množiny M

minimum množiny $M \subset \mathbf{R}$: $z = \min(M) \Leftrightarrow z \in M$ a platí $\forall x \in M: z \leq x$

maximum množiny $M \subset \mathbf{R}$: $w = \max(M) \Leftrightarrow w \in M$ a platí $\forall x \in M: x \leq w$

maximum ani minimum nemusí existovat!

infimum množiny $M \subset \mathbf{R}$: $a = \inf(M) \Leftrightarrow a \in \mathbf{R}^*$ a platí

$(\forall x \in M: a \leq x)$ a zároveň v \mathbf{R}^* neexistuje $b > a$ se stejnou vlastností

supremum množiny $M \subset \mathbf{R}$: $c = \sup(M) \Leftrightarrow c \in \mathbf{R}^*$ a platí

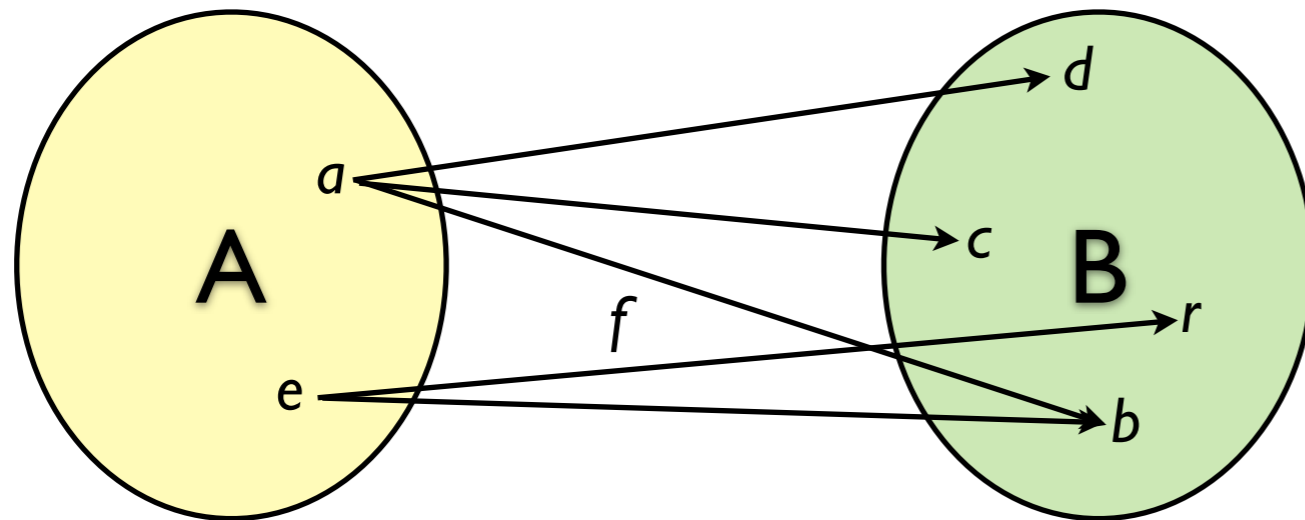
$(\forall x \in M: x \leq c)$ a zároveň v \mathbf{R}^* neexistuje $d < c$ se stejnou vlastností

supremum a infimum existuje vždy!

Pokud existují, je $\min(M) = \inf(M)$ a $\max(M) = \sup(M)$.

II.2. Zobrazení a funkce

$$f: A \rightarrow B$$



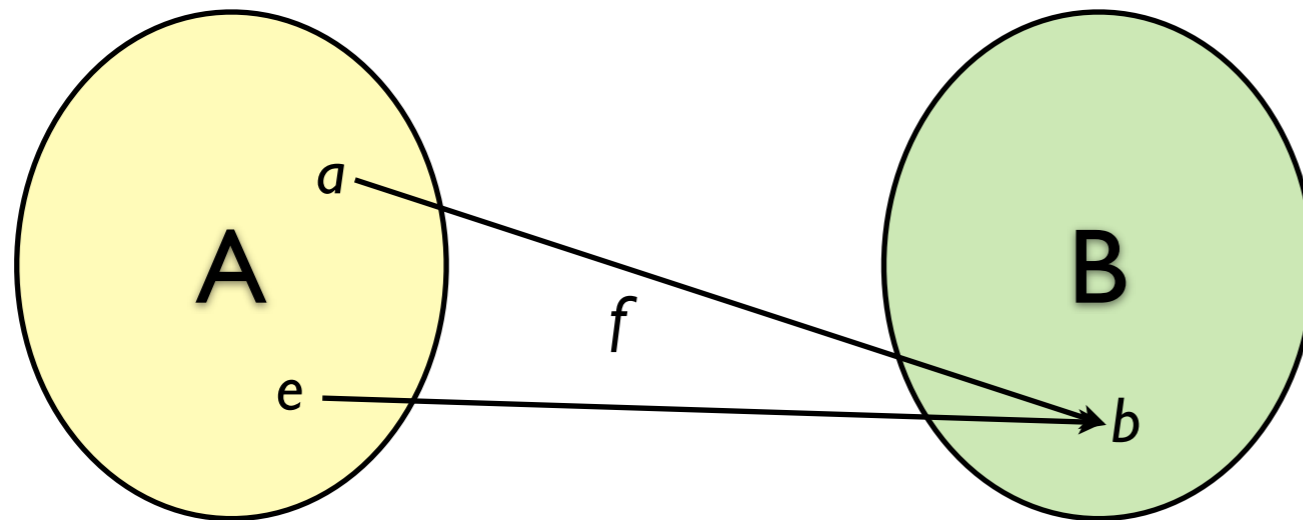
$$(a,b) \in f, (a,c) \in f, (a,d) \in f$$

$$(e,b) \in f, (e,r) \in f,$$

- *relace f z množiny A do množiny B : $f = \{(x,y) : x \in A, y \in B\}$*

II.2. Zobrazení a funkce

$$f: A \rightarrow B$$

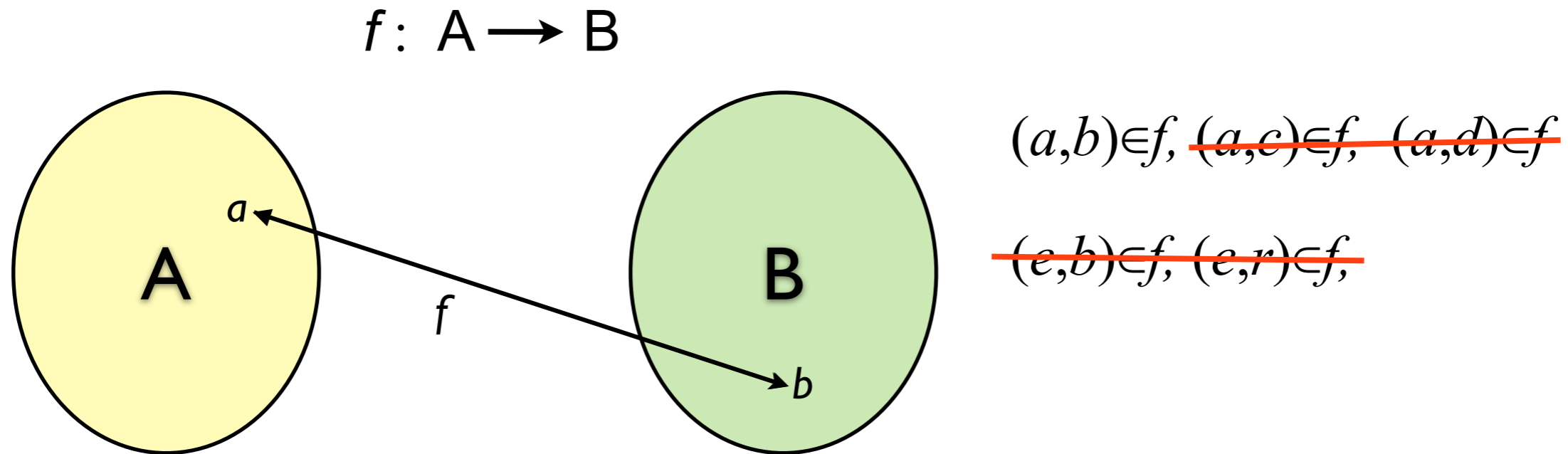


$$(a,b) \in f, \text{ ~~}(a,c) \in f, \text{ ~~}(a,d) \in f~~~~$$

$$(e,b) \in f, \text{ ~~}(e,r) \in f,~~$$

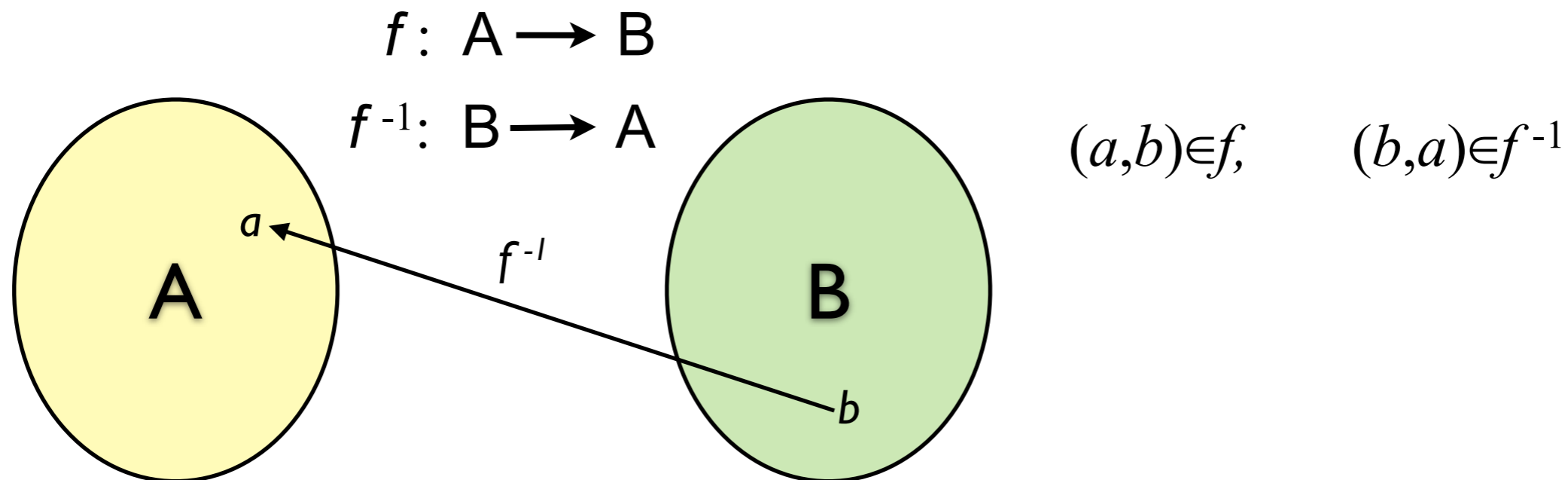
- *relace f z množiny A do množiny B : $f = \{(x,y): x \in A, y \in B\}$*
- *pokud platí: $(a,b) \in f \wedge (a,c) \in f \Rightarrow b=c$ budeme relaci f nazývat zobrazením z množiny A do množiny B*

II.2. Zobrazení a funkce



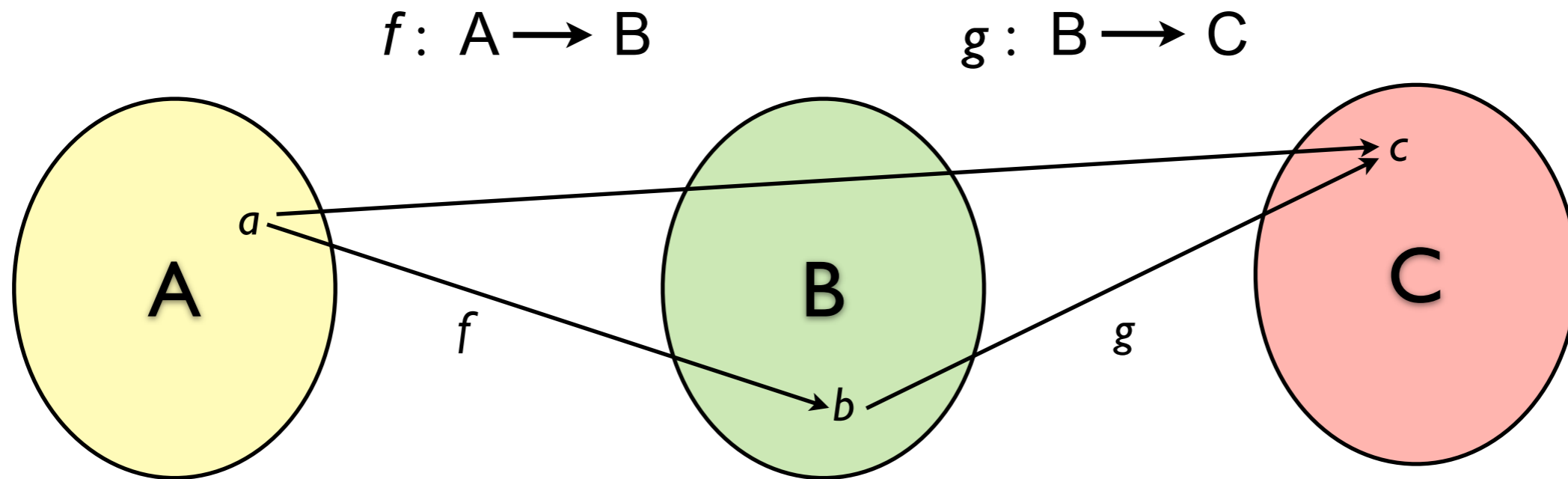
- *relace* f z množiny A do množiny B : $f = \{(x,y): x \in A, y \in B\}$
- pokud platí: $(a,b) \in f \wedge (a,c) \in f \Rightarrow b=c$ budeme relaci f nazývat *zobrazením z množiny A do množiny B*
- platí-li pro zobrazení f i opačná podmínka: $(a,b) \in f \wedge (e,b) \in f \Rightarrow a=e$, říkáme, že zobrazení f je *prosté*
- Je-li zobrazení *prosté* a platí, že $\forall a \in A \exists b \in B: (a,b) \in f$ a naopak, $\forall d \in B \exists c \in A: (c,d) \in f$, říkáme, že zobrazení f je *vzájemně jednoznačné zobrazení množiny A na množinu B*

II.2. Zobrazení a funkce



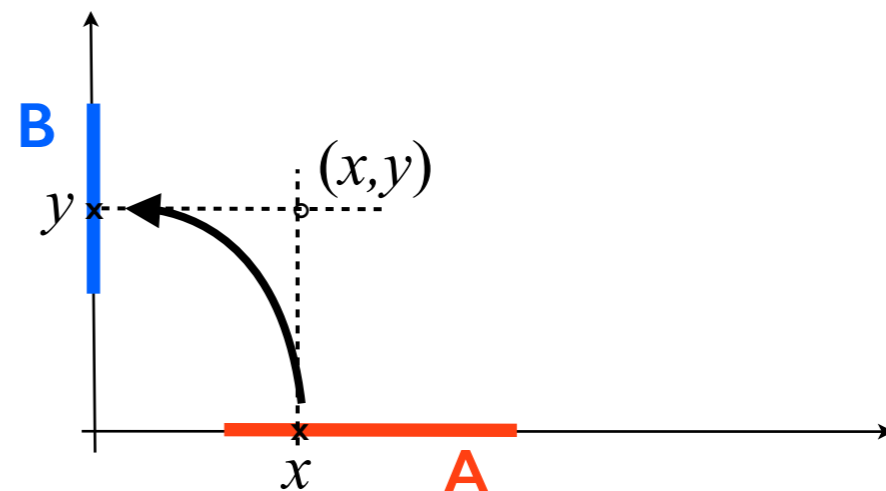
- je-li zobrazení f z množiny A do množiny B prosté, potom množinu
- $f^{-1} = \{(y,x) : x \in A, y \in B, (x,y) \in f\}$ nazýváme *inverzním zobrazením* k zobrazení f

II.2. Zobrazení a funkce

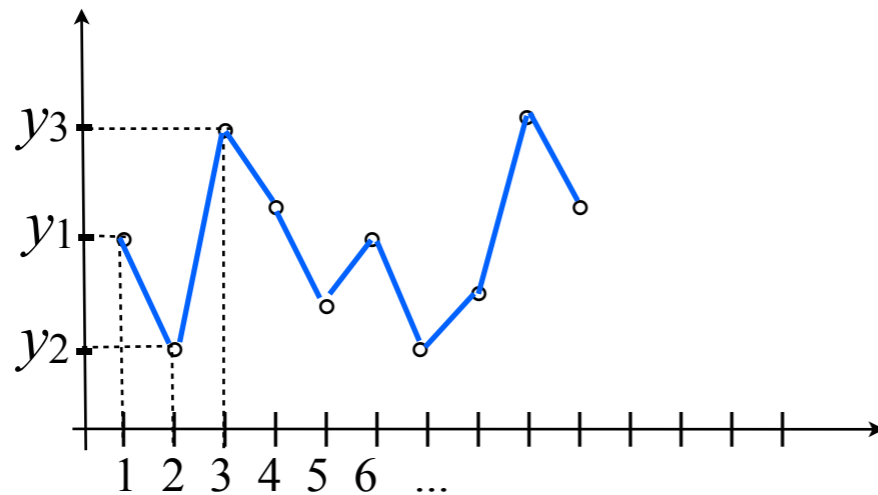


$$h = g \circ f: A \rightarrow C \quad \text{složené zobrazení}$$

- f je prosté a g je prosté $\Rightarrow g \circ f$ je prosté a existuje $(g \circ f)^{-1}$
- $f \circ f^{-1} = i$ (identické zobrazení: $i(x) = x$)
- jsou-li A a B číselné množiny, potom namísto pojmu *zobrazení* používáme pojem *funkce*



II.2. Posloupnosti reálných čísel



$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\{a_n\}$$

Definice: Posloupností reálných čísel budeme nazývat zobrazení množiny přirozených čísel \mathbf{N} do množiny reálných čísel \mathbf{R} .

- Obecně může být posloupnost zobrazením množiny přirozených čísel do jakékoliv množiny (posloupnost vektorů, matic, bodů, funkcí, obrázků, ...)
- pokud je $a_n \in M$ pro všechna n , hovoříme o posloupnosti v množině M
- prvek a_n nazýváme n -tým členem posloupnosti
- jsou-li členy reálné posloupnosti od nějakého indexu n dále všechny nulové, říkáme, že posloupnost je konečná $\{a_i\}_{i=1}^n$

II.2. Posloupnosti reálných čísel

Posloupnost $\{a_n\}$ nazýváme

- omezenou shora $\Leftrightarrow \exists K \in \mathbf{R} \forall n \in \mathbf{N}: a_n \leq K$;
- omezenou zdola $\Leftrightarrow \exists K \in \mathbf{R} \forall n \in \mathbf{N}: a_n \geq K$;
- omezenou, je-li tato posloupnost omezená shora i zdola;
- (ryze) rostoucí $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}: a_n < a_{n+1}$;
- neklesající $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}: a_n \leq a_{n+1}$;
- (ryze) klesající $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}: a_n > a_{n+1}$;
- nerostoucí $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}: a_n \geq a_{n+1}$;
- monotónní, je-li nerostoucí nebo neklesající;
- ryze monotónní, je-li rostoucí nebo klesající;
- konstantní, je-li nerostoucí a zároveň neklesající.

II.3. Limita posloupnosti

Definice: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}: \forall n \in \mathbf{N} \quad (n \geq n_0) \Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$a = \lim a_n$$

$$a_n \rightarrow a$$

Posloupnost $\{a_n\}$

- je *konvergentní*, pokud má limitu $a \in \mathbf{R}$
 - v takovém případě říkáme, že má *vlastní limitu*;
- je *divergentní*, není-li konvergentní; v takovém případě buď
 - limita neexistuje, nebo
 - posloupnost má nevlastní limitu, tedy buď $\lim a_n = +\infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$

Příklady: 1) $\lim \frac{1}{n} \sin n \frac{\pi}{2}$, 2) $\lim \sin n \frac{\pi}{2}$, 3) $\lim n \sin \frac{\pi}{2}$

II.3. Limita posloupnosti

Věta: Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Vybraná podposloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$: $\{a_{k_n}\}$, kde $\{k_n\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

Věta: Posloupnost $\{a_n\}$ má limitu a právě tehdy, když každá vybraná podposloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$ má limitu a .

Věta: Jestliže existují limity posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ a je $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, potom platí

$$1) \lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b,$$

$$2) \lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n = a - b,$$

$$3) \lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n = a \cdot b,$$

pokud výrazy na pravých stranách mají smysl. Pokud navíc pro všechna $n \in \mathbb{N}$ mají smysl podíly a_n / b_n a $b \neq 0$, potom je

$$4) \lim (a_n / b_n) = \lim a_n / \lim b_n = a / b.$$

II.3. Limita posloupnosti

Příklady: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 1} + n}{\sqrt[3]{3n^2 + 2n - 1}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$

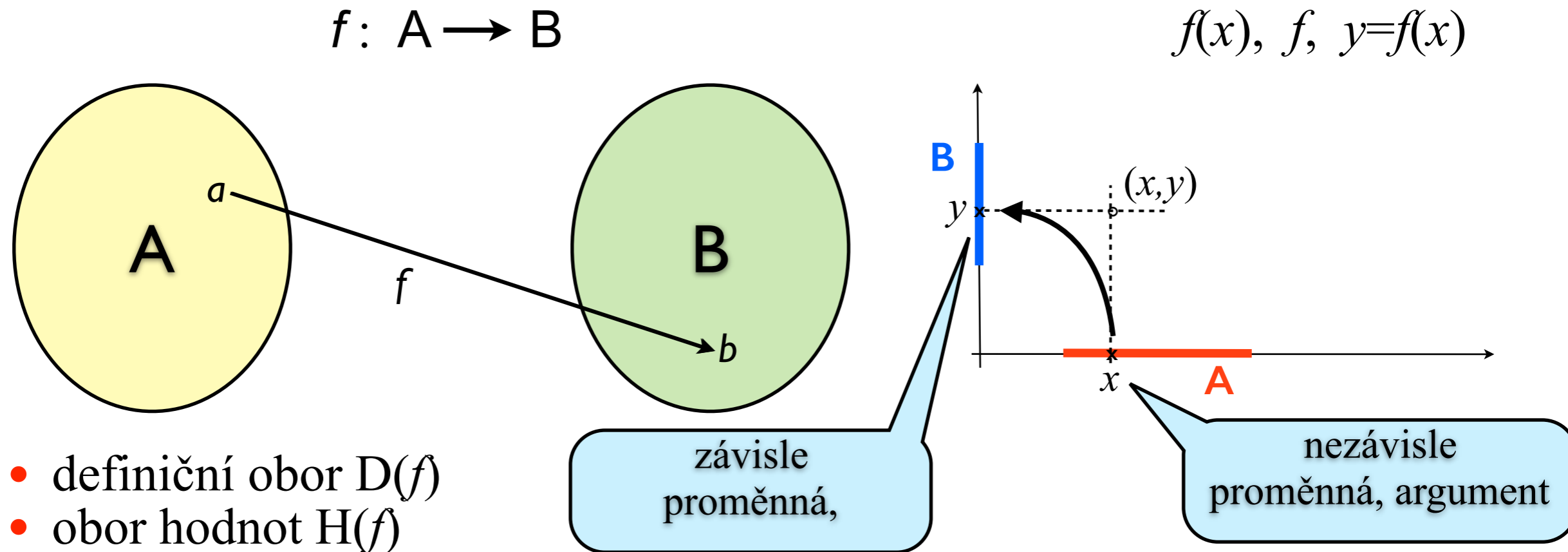
Věta (o limitě sevřené posloupnosti): Necht' jsou $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ takové posloupnosti, pro které platí

- i) $\lim\{a_n\} = \lim\{c_n\} = a$,
 - ii) $\exists n_0 \in \mathbf{N}: \forall n \in \mathbf{N} (n \geq n_0) \Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n$.
- Potom je $\lim\{b_n\} = a$.

Příklad: Ukažte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Věta: Zdola omezená nerostoucí posloupnost má vždy limitu.
Podobně shora omezená neklesající posloupnost má vždy limitu.

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné



- definiční obor $D(f)$
- obor hodnot $H(f)$
- graf funkce $G(f)$

• Reálnou funkci budeme vždy chápat jako dvojici (f, D) .

• Funkce (f, D) a (f, B) , kde $D \neq B$ jsou dvě různé funkce. Je-li $B \subset D$, říkáme, že (f, B) je *zúžením* funkce (f, D) .

• je-li funkce prostá, potom existuje funkce inverzní: $x = f^{-1}(y)$

Je-li $D(f) = A$ a $H(f) = B$, potom je $D(f^{-1}) = B$ a $H(f^{-1}) = A$

II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

Operace s funkcemi:

- součet funkcí (f, D) a (g, C) : $h(x) = f(x) + g(x)$, $x \in D(h) = D \cap C$;
- číselný násobek (f, D) : $g(x) = k \cdot f(x)$, $x \in D$;
- lineární kombinace: $s(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x)$
- násobení a dělení: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in D(h) = D \cap C$;
 $r(x) = f(x)/g(x)$, $D(r) = D \cap \{x \in C \mid g(x) \neq 0\}$;
- složení funkcí (f, D) a (g, C) : $y = f(x)$, $z = g(y) \Rightarrow z = g \circ f(x)$, $D(z) = D$

funkce vnější

funkce vnitřní

Funkci $y = f(x)$ nazýváme

- *sudou* $\Leftrightarrow \forall x \in D(f): (-x) \in D(f) \wedge f(x) = f(-x)$;
- *lichou* $\Leftrightarrow \forall x \in D(f): (-x) \in D(f) \wedge f(x) = -f(-x)$;
- *periodickou* $\Leftrightarrow \exists p \in \mathbf{R} \forall x \in D(f): (x \pm p) \in D(f) \wedge f(x) = f(x \pm p)$

II.4. Lokální vlastnosti funkce

Lokální vlastnost = vlastnost "v bodě" (zprava, zleva)

- *(ryze) rostoucí* v bodě $x_0 \in D(f)$ \Leftrightarrow
$$\exists \varepsilon > 0 \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
- *neklesající* v bodě $x_0 \in D(f)$ \Leftrightarrow
$$\exists \varepsilon > 0 \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$
- *(ryze) klesající* v bodě $x_0 \in D(f)$ \Leftrightarrow
$$\exists \varepsilon > 0 \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$
- *nerostoucí* v bodě $x_0 \in D(f)$ \Leftrightarrow
$$\exists \varepsilon > 0 \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$
- *monotónní* v bodě $x_0 \in D(f)$, je-li v tomto bodě nerostoucí nebo neklesající;
- *ryze monotónní* v bodě $x_0 \in D(f)$, je-li v tomto bodě rostoucí nebo klesající;

Pokud v těchto definicích nahradíme okolí $U_\varepsilon(x_0)$ levým okolím $U_\varepsilon^-(x)$, resp. pravým okolím $U_\varepsilon^+(x)$, budeme hovořit o vlastnosti "zleva", resp. "zprava".

II.4. Globální vlastnosti funkce

Globální vlastnosti = vlastnost na nějaké množině $M \subset D(f)$

- *(ryze) rostoucí* (případně *neklesající*, *ryze klesající*, *nerostoucí*, *monotónní* či *ryze monotónní*) na množině $M \Leftrightarrow$ má-li tuto vlastnost v každém bodě množiny M ;
- *omezenou shora na množině* $M \Leftrightarrow \exists K \in \mathbf{R} \forall x \in M: f(x) \leq K$;
- *omezenou zdola na množině* $M \Leftrightarrow \exists K \in \mathbf{R} \forall x \in M: f(x) \geq K$;
- *omezenou na množině* M , je-li tato funkce omezená shora i zdola na množině M ;
- *konstantní*, je-li nerostoucí a zároveň neklesající.

Pokud pouze řekneme, že funkce je rostoucí (případně neklesající, klesající, nerostoucí, monotónní, ryze monotónní, omezená či konstantní), rozumíme tím, že má tuto vlastnost na celém svém definičním oboru $D(f)$.

II.4. Extrémy funkce

Říkáme, že funkce nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého:

- *ostrého lokálního minima* $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): f(x_0) < f(x)$;
- *ostrého lokálního maxima* $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): f(x_0) > f(x)$;
- *lokálního minima* $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): f(x_0) \leq f(x)$;
- *lokálního maxima* $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): f(x_0) \geq f(x)$;

Pokud nastane některý z výše uvedených případů, říkáme, že funkce nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého (ostrého či neostrého) *lokálního extrému*.

Pokud nastane některý z výše uvedených případů, říkáme, že funkce nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého (ostrého či neostrého) *lokálního extrému*.

II.4. Extrémy funkce

Říkáme, že funkce nabývá na množině $M \subset D(f)$ svého extrému, pokud nastane některá z následujících situací:

- *ostré minimum na množině* $M \Leftrightarrow \exists x_0 \in M \forall x \in M: f(x_0) < f(x)$;
- *ostré maximum na množině* $M \Leftrightarrow \exists x_0 \in M \forall x \in M: f(x_0) > f(x)$;
- *minimum na množině* $M \Leftrightarrow \exists x_0 \in M \forall x \in M: f(x_0) \leq f(x)$;
- *maximum na množině* $M \Leftrightarrow \exists x_0 \in M \forall x \in M: f(x_0) \geq f(x)$;

Pokud je $M = D(f)$, hovoříme o "globálních" extrémech funkce.

$$f(x_0) = \min_{x \in M} f(x)$$

$$x_0 = \arg \min_{x \in M} f(x)$$

$$f(x_0) = \min_M f(x)$$

$$x_0 = \arg \min_M f(x)$$

$$f(x_0) = \min f(x)$$

$$x_0 = \arg \min f(x)$$

II.4. Extrémy funkce

Označme $f(M) = \{y \in \mathbf{R}: y = f(x), x \in M\}$ množinu všech hodnot funkce f na množině M .

Hodnotu $\sup (f(M))$ nazýváme *supremem* funkce f na množině M .
Podobně $\inf (f(M))$ nazveme *infimem* funkce f na množině M .

$$y = \sup_{x \in M} f(x)$$

$$y = \sup_M f(x)$$

$$y = \sup f(x)$$

$$y = \inf_{x \in M} f(x)$$

$$y = \inf_M f(x)$$

$$y = \inf f(x)$$

- supremum a infimum jsou pouze globální pojmy (nedefinují se lokálně)
- maximum ani minimum funkce nemusí existovat ani v lokální formě, ani ve formě globální a to ani pro omezenou funkci;
- supremum a infimum funkce existuje vždy;
- pokud existuje minimum nebo maximum, potom je $\min f = \inf f$ a $\max f = \sup f$

II.5. Elementární funkce

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| a) mocninné funkce | d) goniometrické funkce |
| b) exponenciální funkce | e) cyklometrické funkce |
| c) logaritmické funkce | f) funkce $\text{sgn}(x)$ |
-

a) Mocninné funkce: $f(x) = x^a$, $a \in \mathbf{R}$

- $a = 0 \Rightarrow f(x) = 1$ - konstantní funkce
 - $a \in \mathbf{N} \Rightarrow$ přirozená mocnina
- } $D(f) = \mathbf{R}$
- lineární kombinace konstanty a přirozených mocnin \Rightarrow *polynomické funkce*
 - je-li a celé záporné, potom definiční obor nesmí obsahovat nulu
 - pro $a \in \mathbf{R}$ je $D(f) = (0, \infty)$
 - dodefinujeme-li $0^a = 0$, pak pro $a > 0$ je $D(f) = \langle 0, \infty \rangle$
 - pro $a = p/q$, kde $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$ liché, lze definiční obor rozšířit i na $x < 0$.

II.5. Elementární funkce

b) Exponenciální funkce: $f(x) = a^x$, $a > 0$

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = (0, \infty)$
- je monotónní: pro $a < 1$ je klesající, pro $a > 1$ je rostoucí
- $a = 1 \Rightarrow f(x) = 1$ - konstantní funkce
- $a = e \Rightarrow$ přirozená exponenciální funkce a značíme ji $y = \exp(x)$
($e =$ Eulerova konstanta) $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

c) Logaritmické funkce: $f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$

- $D(f) = (0, \infty)$, $H(f) = \mathbf{R}$
- je monotónní: pro $a < 1$ je klesající, pro $a > 1$ je rostoucí
- $a = e \Rightarrow$ přirozený logaritmus a značíme ji $y = \ln(x)$
- $a = 10 \Rightarrow$ dekadický logaritmus

Funkce exponenciální a logaritmické jsou navzájem inverzní. Platí
 $x = \log_a(y) \Leftrightarrow y = a^x$ nebo též $\log_a(a^x) = x$

II.5. Elementární funkce

d) Goniometrické funkce: $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$,

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
- jsou periodické s periodou 2π , sinus je lichá, kosinus je sudá funkce
- podílem dostaneme funkce tangens a kotangens:

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

e) Cyklometrické funkce: $f(x) = \arcsin(x)$, $f(x) = \arccos(x)$

- zúžíme-li funkci sinus na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, potom inverzní funkce k této funkci je $\arcsin(x)$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$
- zúžíme-li funkci kosinus na interval $\langle 0, \pi \rangle$, potom inverzní funkce k této funkci je $\arccos(x)$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$
- $\operatorname{arctg}(x)$, $\operatorname{arccotg}(x)$ jsou inverzní funkce k jedné větvi $\operatorname{tg}(x)$, $\operatorname{cotg}(x)$

Funkce goniometrické zúžené na jednu periodu a funkce cyklometrické jsou navzájem inverzní.

II.5. Elementární funkce

f) Funkce signum: $f(x) = \text{sgn}(x)$

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \{-1, 0, 1\}$

- $$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

- funkce absolutní hodnota: $|x| = x \cdot \text{sgn}(x)$

Ostatní funkce, se kterými budeme pracovat, vznikají jako lineární kombinace, součin, podíl či složení těchto elementárních funkcí.

II.6. Limita funkce

Definice 1: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou funkce f* v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in P_\delta(x_0) \quad f(x) \in U_\varepsilon(a)$$

Definice 2: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou funkce f* v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže existuje prstencové okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v tomto okolí platí

$$\lim x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim f(x_n) = a$$

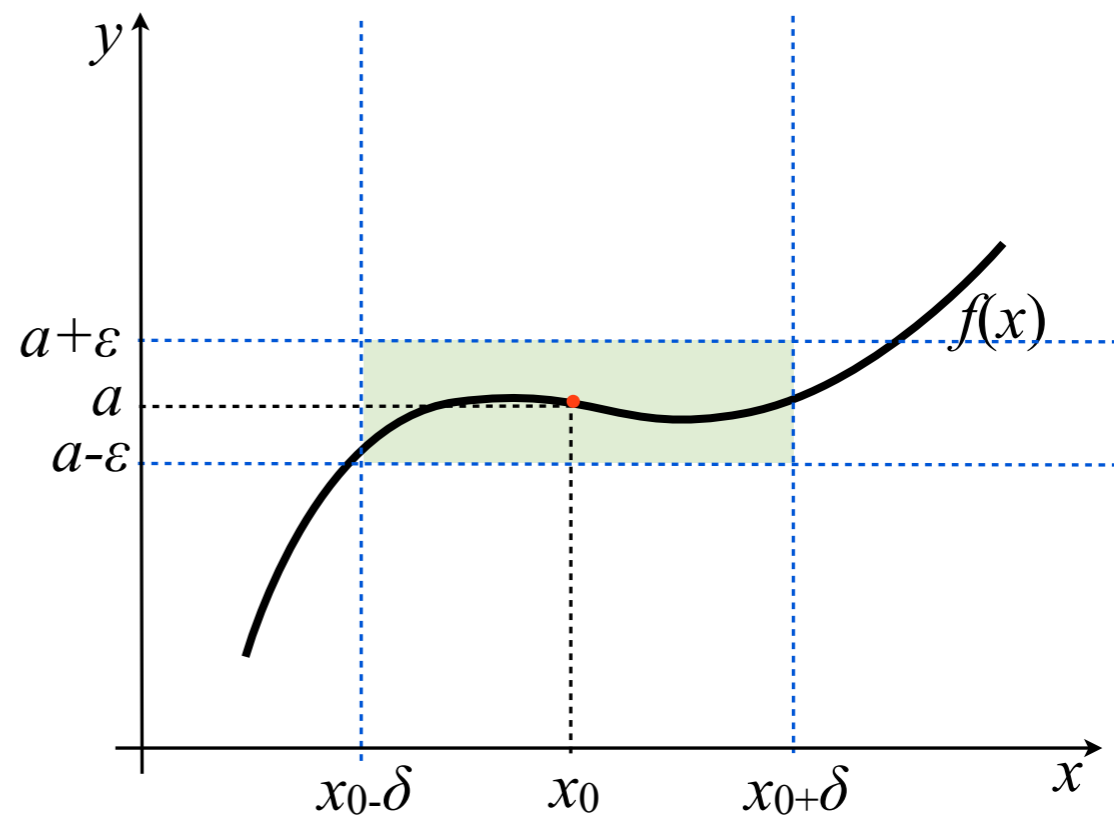
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Věta: Funkce může mít v jednom bodě nejvýše jednu limitu.

Příklady: 1) $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 2x + 1)$, 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$, 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 2)$

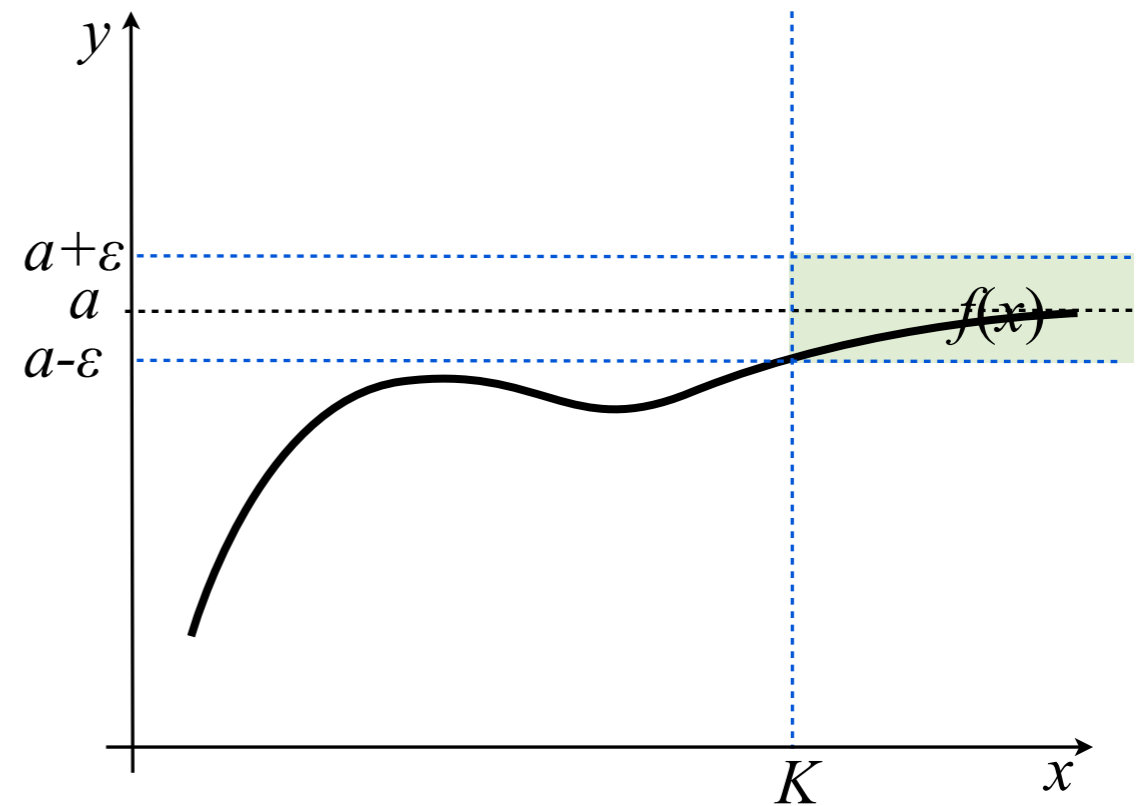
II.6. Limita funkce

- *vlastní limita ve vlastním bodě*
($x_0 \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$)



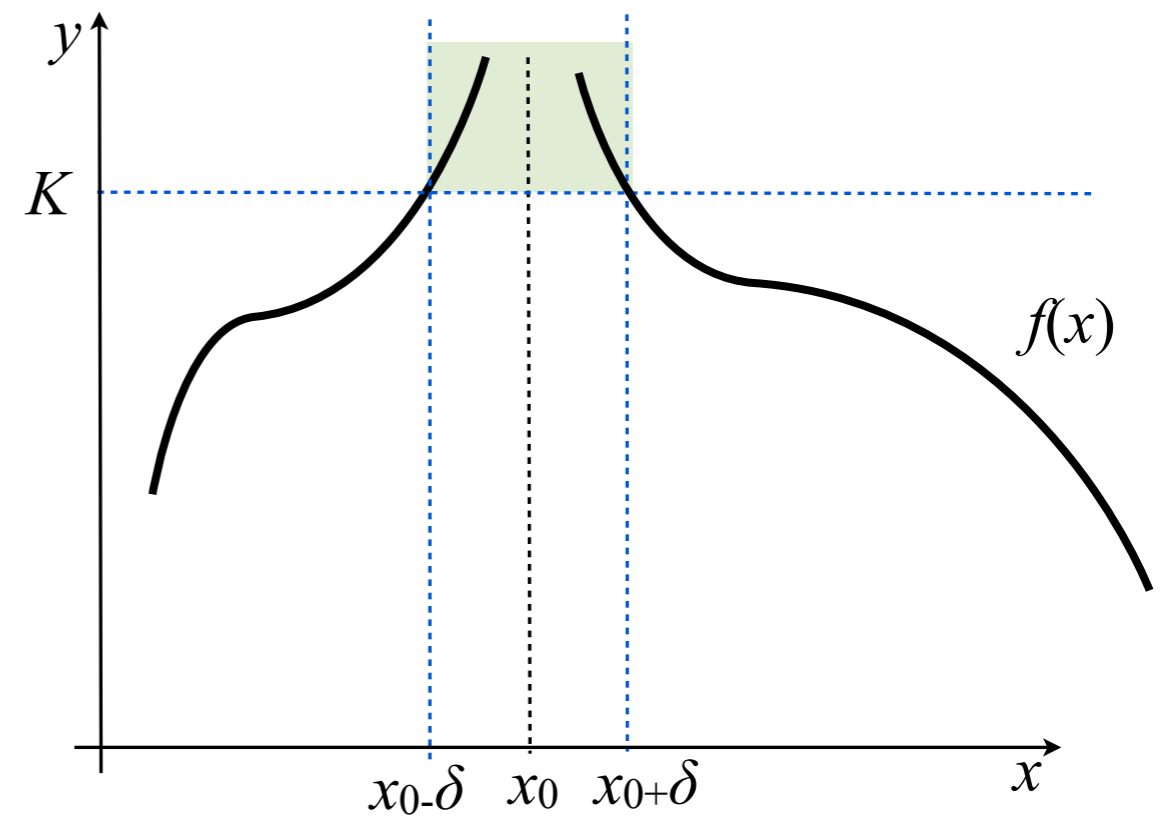
II.6. Limita funkce

- *vlastní limita ve vlastním bodě*
($x_0 \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$)
- *vlastní limita v nevlastním bodě*
($x_0 = \pm\infty$, $a \in \mathbf{R}$)



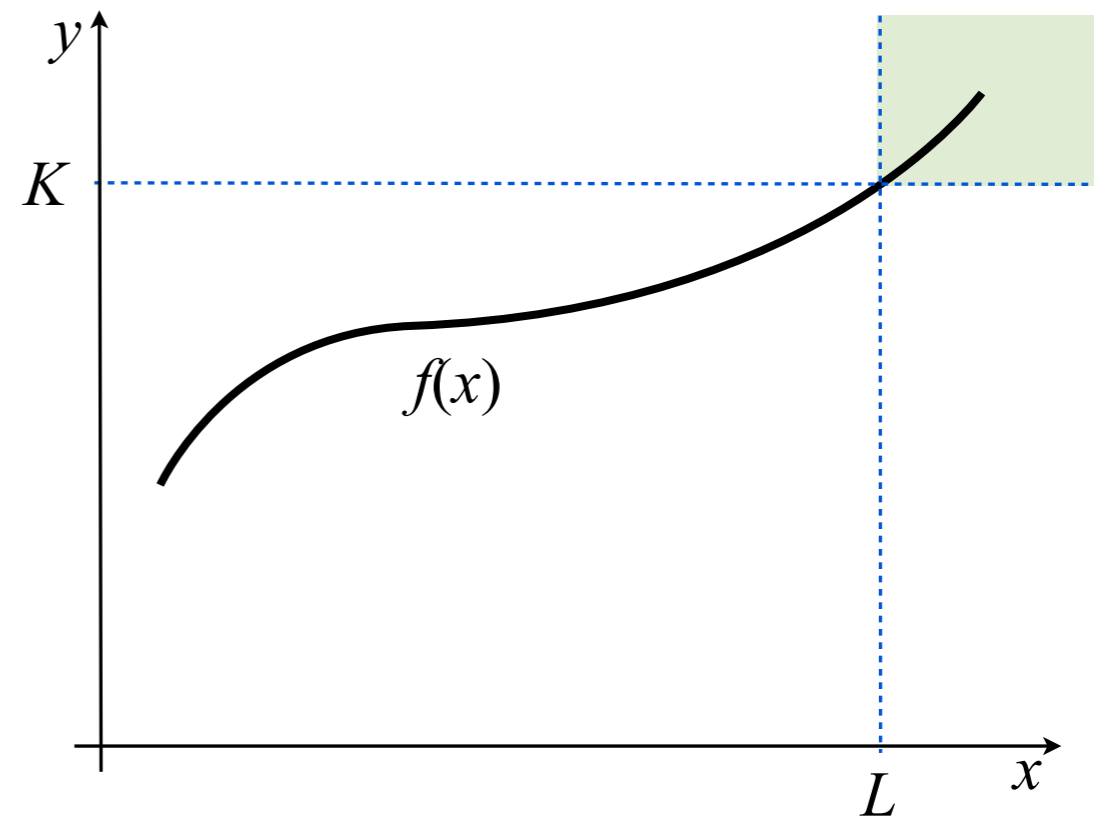
II.6. Limita funkce

- *vlastní limita ve vlastním bodě*
($x_0 \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$)
- *vlastní limita v nevlastním bodě*
($x_0 = \pm\infty$, $a \in \mathbf{R}$)
- *nevlastní limita ve vlastním bodě*
($x_0 \in \mathbf{R}$, $a = \pm\infty$)



II.6. Limita funkce

- *vlastní limita ve vlastním bodě*
($x_0 \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$)
- *vlastní limita v nevlastním bodě*
($x_0 = \pm\infty$, $a \in \mathbf{R}$)
- *nevlastní limita ve vlastním bodě*
($x_0 \in \mathbf{R}$, $a = \pm\infty$)
- *nevlastní limita v nevlastním bodě*
($x_0 = \pm\infty$, $a = \pm\infty$)



II.6. Limita funkce

Věta (o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí):

Necht' $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$. Pak platí:

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b$,

b) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b$,

c) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = a/b$,

pokud výrazy na pravé straně mají smysl.

Věta (o limitě složené funkce): Má-li funkce g limitu $\pm\infty$ v bodě $x_0 \in \mathbf{R}^*$ a funkce f má v $\pm\infty$ limitu rovnou číslu L , potom je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = L$$

II.6. Jednostranné limity funkce

Definice 1: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou funkce f* v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in P_\delta(x_0) \quad f(x) \in U_\varepsilon(a)$$

Definice 2: Číslo $a \in \mathbf{R}^*$ nazýváme *limitou funkce f* v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže existuje prstencové okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v tomto okolí platí

$$\lim x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim f(x_n) = a$$

Nahradíme-li v definici prstencové δ -okolí levým nebo pravým δ -okolím, budeme hovořit o jednostranné *limitě zleva* nebo *limitě zprava* v bodě x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \qquad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$$

Věta: Funkce f má v bodě x_0 limitu rovnou číslu a právě když má v tomto bodě limitu zleva a zároveň limitu zprava a obě jsou rovné a .

II.7. Spojitost funkce

Definice: Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Nahradíme-li v této definici oboustrannou limitu limitou jednostrannou, potom hovoříme o *spojitosti zleva* nebo *spojitosti zprava* v bodě x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = f(x_0) \qquad \lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x) = f(x_0)$$

Spojitost funkce v bodě x_0 je lokální vlastností funkce. Globálně lze definovat spojitost funkce na nějaké množině $M \subset D(f)$:

Vnitřek množiny $M \subset \mathbf{R}$ je množina $\text{Int}(M) = \{x \in M : \exists \delta > 0 \ U_\delta(x) \subset M\}$.

Definice: Řekneme, že funkce f je spojitá na množině $M \subset D(f)$, pokud je (oboustranně)spojitá v každém vnitřním bodě $x_0 \in \text{Int}(M)$ a jednostranně spojitá v jejích krajních bodech.

II.7. Spojitost funkce

Věta (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí): Jsou-li funkce f a g spojité v bodě $x_0 \in D(f) \cap D(g)$, potom také funkce $f \pm g$, $f \cdot g$ a $|f|$ jsou spojité v tomto bodě. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, potom i podíl f/g je spojitá funkce v bodě x_0 .

Uvedená věta platí i pro spojitost zleva, spojitost zprava a spojitost na intervalu.

Všechny elementární funkce a jejich lineární kombinace jsou spojité na svých definičních oborech. Výjimkou je funkce sgn , která je jediná nespojitá na každém intervalu, obsahujícím nulu.

Věta (o spojitosti složené funkce): Platí-li, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ a funkce g je spojitá v bodě $f(x_0) \in D(g)$, potom je spojitá i funkce složená $h = g \circ f$ v bodě x_0 .

Je-li funkce f spojitá v intervalu M , funkce g je spojitá v intervalu H a platí, že $f(M) \subset H$, potom je spojitá i funkce složená $h = g \circ f$ v M .

II.7. Spojitost funkce

Věta (Darbouxova vlastnost): Je-li funkce f spojitá v intervalu I , potom pro každé dva body x_1 a x_2 z I pro něž je $f(x_1) \leq f(x_2)$ platí, že ke každému číslu η takovému, že $f(x_1) \leq \eta \leq f(x_2)$ existuje číslo ξ tak, že $f(\xi) = \eta$.

Důsledky: Pro spojitou funkci na intervalu I platí

- Existuje-li $x_0 \in I$ tak, že $f(x_0) > 0$, potom existuje prstencové okolí bodu x_0 tak, že $f(x) > 0$ pro všechna x z tohoto okolí.
- Jestliže pro dva body x_1 a x_2 z I platí, že $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, potom existuje číslo ξ ležící mezi body x_1 a x_2 tak, že $f(\xi) = 0$.
- $f(I)$ je buď opět interval nebo jednobodová množina (množina $f(I)$ je souvislá).

Věta (o spojitosti inverzní funkce): Je-li funkce f spojitá a prostá v intervalu I a je $f(I) = J$, potom k ní existuje inverzní funkce která je spojitá na intervalu J .

II.7. Spojitost funkce

Věta (o existenci maxima a minima): Spojitá funkce v uzavřeném omezeném intervalu nabývá vždy svého maxima i minima.

Věta (o limitě složené funkce): Má-li funkce g vlastní limitu λ ve vlastním bodě x_0 a funkce f je spojitá v bodě λ , potom platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(\lambda)$$

Příklady: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ $\lim_{x \rightarrow \pi} (\sin x)^{\frac{1}{2}}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(x)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sin(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 1}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x - 3} - \sqrt{x})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x^2 - 1} - \frac{2}{x - 1} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x - 1}}{x + 1} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{x - 1} \right)$$

II.7. Spojitost funkce