

# MATEMATIKA I.

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

II. Základy matematické analýzy

# Matematika I.

I. Lineární algebra

II. Základy matematické analýzy

III. Diferenciální počet

IV. Integrální počet

# Matematika I.

## II. Základy matematické analýzy

- II.1. Číselné množiny, reálná čísla
- II.2. Posloupnosti reálných čísel
- II.3. Limita posloupnosti
- II.4. Funkce jedné reálné proměnné
- II.5. Elementární funkce
- II.6. Limita funkce
- II.7. Spojitost funkce

# Matematika I.

## II. Základy matematické analýzy

### II.1. Číselné množiny, reálná čísla

<b>N</b>	množina přirozených čísel	$1, 2, \dots$
<b>Z</b>	množina celých čísel	$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
<b>P</b>	množina racionálních čísel	$r = \frac{a}{b} \quad a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{N},$
<b>Q</b>	množina iracionálních čísel	$\sqrt{2}, \pi, e^2, \dots$
<b>R</b>	množina reálných čísel	$\mathbf{R} = \mathbf{P} \cup \mathbf{Q} \quad , \quad \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$
<b>C</b>	množina komplexních čísel	$c = a + ib, \quad c = r(\cos\alpha + i.\sin\alpha)$

## II.1. Číselné množiny, reálná čísla

Rozšířená množina reálných čísel  $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Pro libovolné

$$\begin{array}{lll} x \in \mathbf{R} \text{ v } \mathbf{R}^* \text{ platí:} & x + (+\infty) = +\infty, & x + (-\infty) = -\infty, \\ x - (+\infty) = -\infty, & x - (-\infty) = +\infty, & x / (+\infty) = x / (-\infty) = 0 \end{array}$$

dále:

$$\begin{array}{lll} (+\infty) + (+\infty) = +\infty, & (-\infty) + (-\infty) = -\infty, & (+\infty) - (-\infty) = +\infty, \\ (-\infty) - (+\infty) = -\infty, & & \\ (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, & (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty, & (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{a je-li } x > 0, \text{ potom:} & x \cdot (+\infty) = +\infty, & x \cdot (-\infty) = -\infty, \\ \text{a je-li } x < 0, \text{ potom:} & x \cdot (+\infty) = -\infty, & x \cdot (-\infty) = +\infty \end{array}$$

**Neurčité výrazy, které nemají smysl:**

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty), \quad (+\infty) + (-\infty), \quad (\pm\infty) / (\pm\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty)$$

## II.1. Číselné množiny, intervaly, okolí bodu

otevřený interval v  $\mathbf{R}$ :  $I = (a,b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$

uzavřený interval v  $\mathbf{R}$ :  $J = \langle a,b \rangle = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$

sjednocení intervalů v  $\mathbf{R}$ :  $I \cup J = \{x \in \mathbf{R} : x \in I \vee x \in J\}$

průnik intervalů v  $\mathbf{R}$ :  $I \cap J = \{x \in \mathbf{R} : x \in I \wedge x \in J\}$

doplňek intervalu  $I$  v  $\mathbf{R}$ :  $I^c = \{x \in \mathbf{R} : x \notin I\} = (-\infty, a) \cup \langle b, +\infty \rangle$

$\varepsilon$ -okolí bodu  $x \in \mathbf{R}$  je otevřený interval  $U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

levým  $\varepsilon$ -okolím bodu  $x \in \mathbf{R}$  je otevřený interval  $U_\varepsilon^-(x) = (x-\varepsilon, x)$

pravým  $\varepsilon$ -okolím bodu  $x \in \mathbf{R}$  je otevřený interval  $U_\varepsilon^+(x) = (x, x+\varepsilon)$

prstencové  $\varepsilon$ -okolí bodu  $x \in \mathbf{R}$  je množina  $P_\varepsilon(x) - \{x\} = U_\varepsilon^-(x) \cup U_\varepsilon^+(x)$

okolím  $+\infty$  je množina  $(a, +\infty)$  pro libovolné  $a \in \mathbf{R}$

okolím  $-\infty$  je množina  $(-\infty, a)$  pro libovolné  $a \in \mathbf{R}$

## II.1. Číselné množiny, extrémny množin

Reálná čísla jsou uspořádána relací  $\leq$  :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}: (x \leq y) \text{ nebo } (y \leq x)$$

Je-li  $(x \leq y)$  a neplatí  $(y \leq x)$ , potom je  $x < y$  (*ostrá nerovnost*)

$$\forall x \in \mathbf{R}: -\infty < x < +\infty$$

extrémny  
množiny  $M$

*minimum množiny*  $M \subset \mathbf{R}$ :  $z = \min(M) \Leftrightarrow z \in M$  a platí  $\forall x \in M: z \leq x$

*maximum množiny*  $M \subset \mathbf{R}$ :  $w = \max(M) \Leftrightarrow w \in M$  a platí  $\forall x \in M: x \leq w$

maximum ani minimum nemusí existovat!

*infimum množiny*  $M \subset \mathbf{R}$ :  $a = \inf(M) \Leftrightarrow a \in \mathbf{R}^*$  a platí

$(\forall x \in M: a \leq x)$  a zároveň v  $\mathbf{R}^*$  neexistuje  $b > a$  se stejnou vlastností

*supremum množiny*  $M \subset \mathbf{R}$ :  $c = \sup(M) \Leftrightarrow c \in \mathbf{R}^*$  a platí

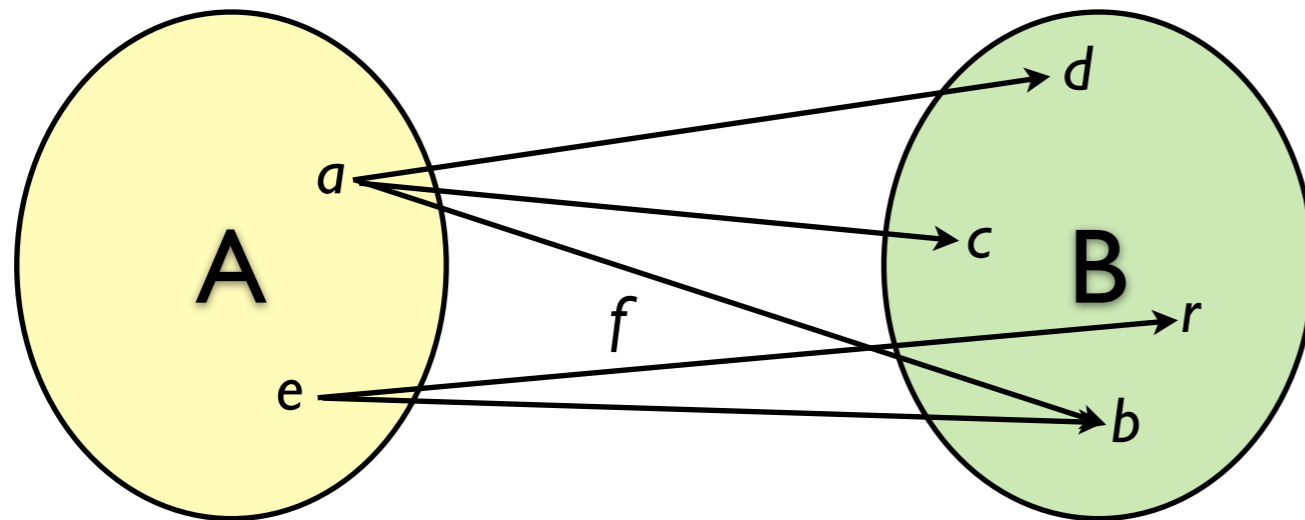
$(\forall x \in M: x \leq c)$  a zároveň v  $\mathbf{R}^*$  neexistuje  $d < c$  se stejnou vlastností

supremum a infimum existuje vždy!

Pokud existují, je  $\min(M) = \inf(M)$  a  $\max(M) = \sup(M)$ .

## II.2. Zobrazení a funkce

$$f: A \rightarrow B$$



$$(a,b) \in f, (a,c) \in f, (a,d) \in f$$

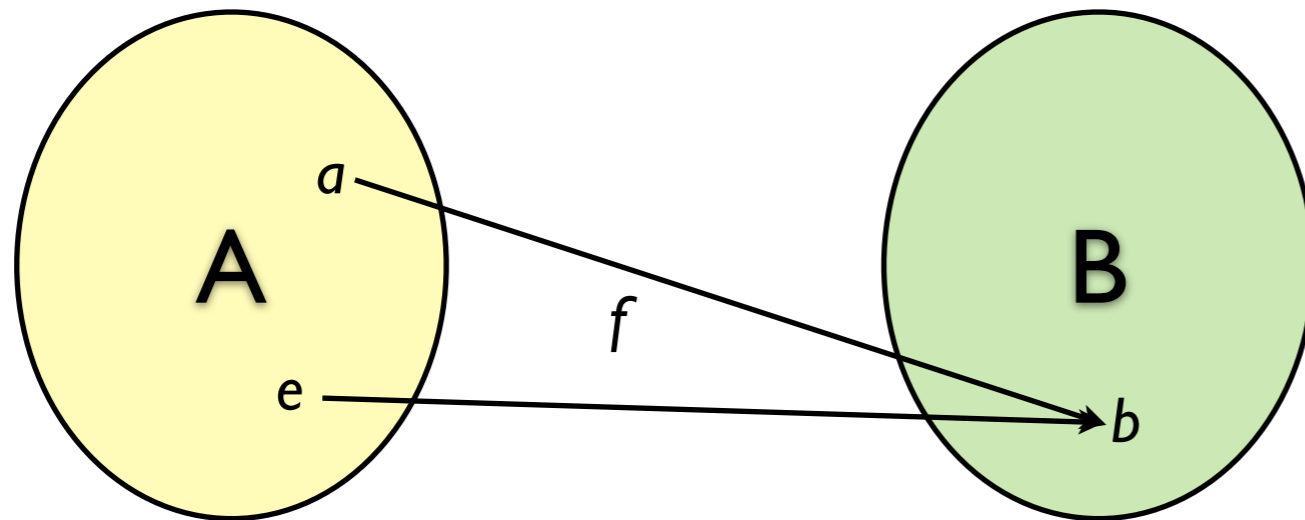
$$(e,b) \in f, (e,r) \in f,$$

- *relace  $f$  z množiny  $A$  do množiny  $B$ :  $f = \{(x,y) : x \in A, y \in B\}$*



## II.2. Zobrazení a funkce

$$f: A \rightarrow B$$

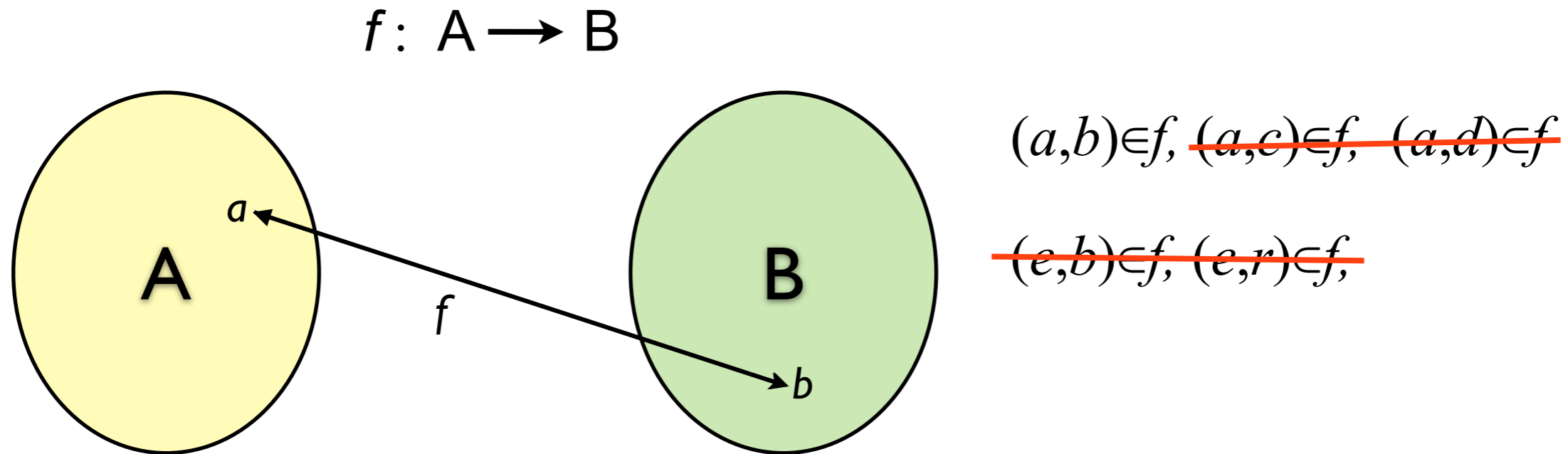


$$(a,b) \in f, \text{ ~~}(a,c) \in f, \text{ ~~}(a,d) \in f~~~~$$

$$(e,b) \in f, \text{ ~~}(e,r) \in f,~~$$

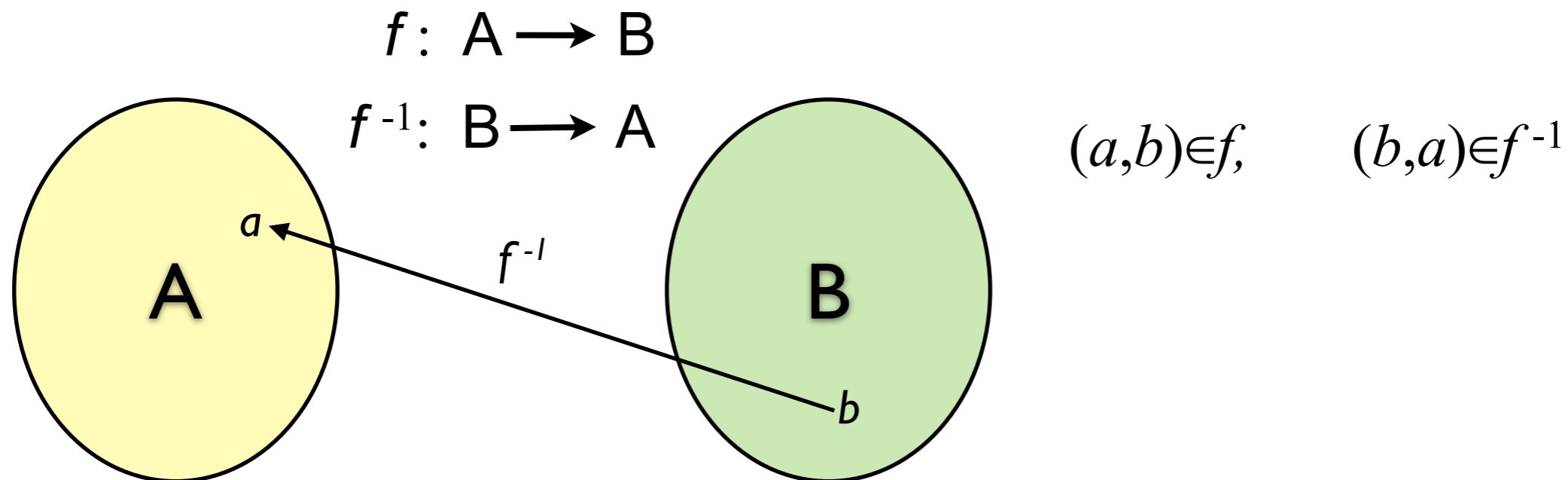
- *relace  $f$  z množiny  $A$  do množiny  $B$ :  $f = \{(x,y): x \in A, y \in B\}$*
- *pokud platí:  $(a,b) \in f \wedge (a,c) \in f \Rightarrow b=c$  budeme relaci  $f$  nazývat zobrazením z množiny  $A$  do množiny  $B$*

## II.2. Zobrazení a funkce



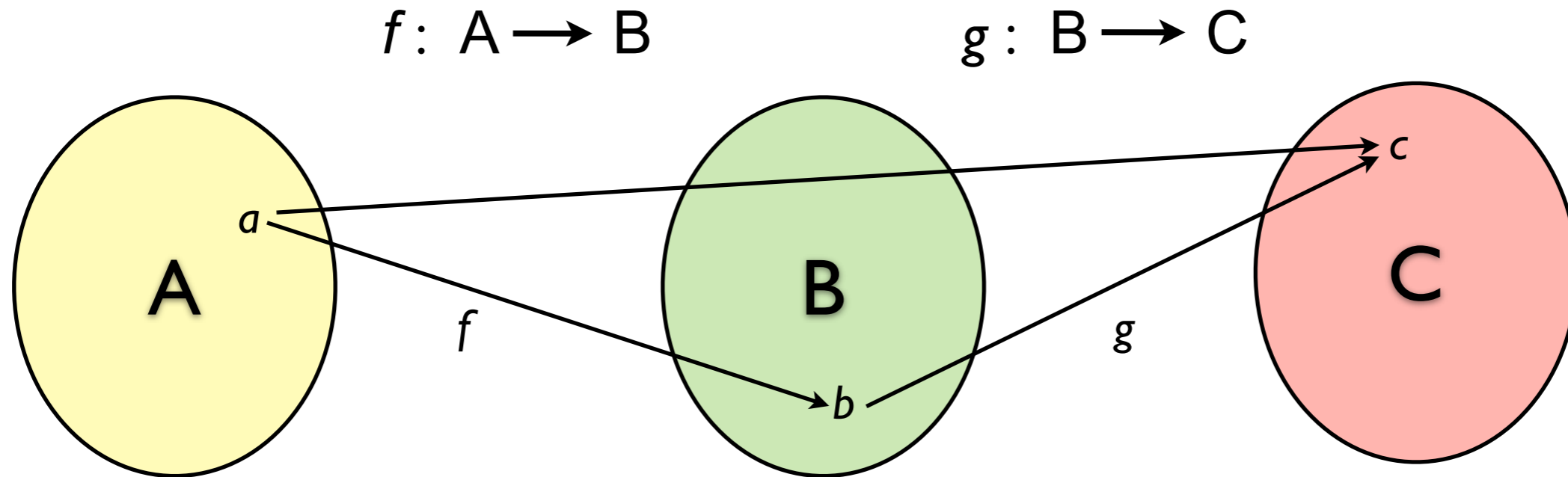
- *relace*  $f$  z množiny  $A$  do množiny  $B$ :  $f = \{(x,y): x \in A, y \in B\}$
- pokud platí:  $(a,b) \in f \wedge (a,c) \in f \Rightarrow b=c$  budeme relaci  $f$  nazývat *zobrazením z množiny A do množiny B*
- platí-li pro zobrazení  $f$  i opačná podmínka:  $(a,b) \in f \wedge (e,b) \in f \Rightarrow a=e$  , říkáme, že zobrazení  $f$  je *prosté*
- Je-li zobrazení *prosté* a platí, že  $\forall a \in A \exists b \in B: (a,b) \in f$  a naopak,  $\forall d \in B \exists c \in A: (c,d) \in f$ , říkáme, že zobrazení  $f$  je *vzájemně jednoznačné zobrazení množiny A na množinu B*

## II.2. Zobrazení a funkce



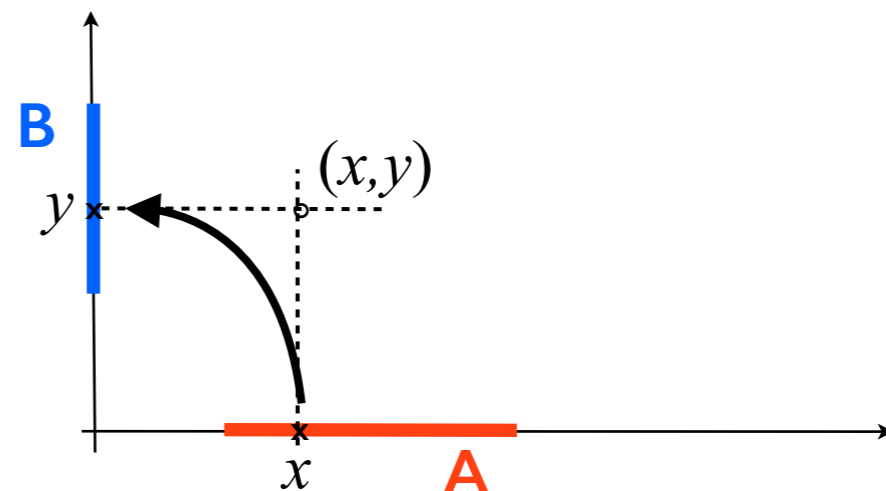
- je-li zobrazení  $f$  z množiny  $A$  do množiny  $B$  prosté, potom množinu
- $f^{-1} = \{(y,x) : x \in A, y \in B, (x,y) \in f\}$  nazýváme *inverzním zobrazením* k zobrazení  $f$

## II.2. Zobrazení a funkce

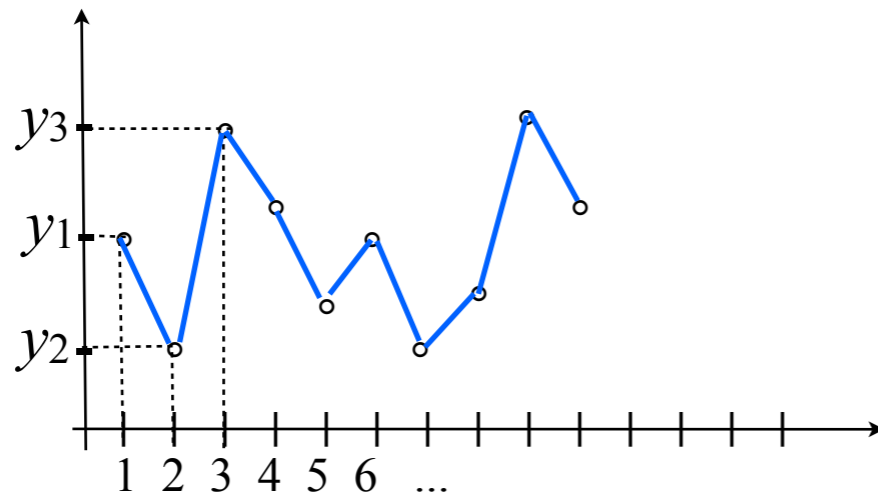


$$h = g \circ f: A \rightarrow C \quad \text{složené zobrazení}$$

- $f$  je prosté a  $g$  je prosté  $\Rightarrow g \circ f$  je prosté a existuje  $(g \circ f)^{-1}$
- $f \circ f^{-1} = i$  (identické zobrazení:  $i(x) = x$ )
- jsou-li A a B číselné množiny, potom namísto pojmu *zobrazení* používáme pojem *funkce*



## II.2. Posloupnosti reálných čísel



$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\{a_n\}$$

**Definice:** Posloupností reálných čísel budeme nazývat zobrazení množiny přirozených čísel  $\mathbf{N}$  do množiny reálných čísel  $\mathbf{R}$ .

- Obecně může být posloupnost zobrazením množiny přirozených čísel do jakékoliv množiny (posloupnost vektorů, matic, bodů, funkcí, obrázků, ...)
- pokud je  $a_n \in M$  pro všechna  $n$ , hovoříme o posloupnosti v množině  $M$
- prvek  $a_n$  nazýváme  $n$ -tým členem posloupnosti
- jsou-li členy reálné posloupnosti od nějakého indexu  $n$  dále všechny nulové, říkáme, že posloupnost je konečná  $\{a_i\}_{i=1}^n$

## II.2. Posloupnosti reálných čísel

Posloupnost  $\{a_n\}$  nazýváme

- omezenou shora  $\Leftrightarrow \exists K \in \mathbf{R} \forall n \in \mathbf{N}: a_n \leq K$  ;
- omezenou zdola  $\Leftrightarrow \exists K \in \mathbf{R} \forall n \in \mathbf{N}: a_n \geq K$  ;
- omezenou, je-li tato posloupnost omezená shora i zdola;
- (ryze) rostoucí  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}: a_n < a_{n+1}$  ;
- neklesající  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}: a_n \leq a_{n+1}$  ;
- (ryze) klesající  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}: a_n > a_{n+1}$  ;
- nerostoucí  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}: a_n \geq a_{n+1}$  ;
- monotónní, je-li nerostoucí nebo neklesající;
- ryze monotónní, je-li rostoucí nebo klesající;
- konstantní, je-li nerostoucí a zároveň neklesající.

## II.3. Limita posloupnosti

**Definice:** Číslo  $a \in \mathbf{R}^*$  nazýváme *limitou posloupnosti*  $\{a_n\}$ , jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}: \forall n \in \mathbf{N} \quad (n \geq n_0) \Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$a = \lim a_n$$

$$a_n \rightarrow a$$

Posloupnost  $\{a_n\}$

- je *konvergentní*, pokud má limitu  $a \in \mathbf{R}$ 
  - v takovém případě říkáme, že má *vlastní limitu*;
- je *divergentní*, není-li konvergentní; v takovém případě buď
  - limita neexistuje, nebo
  - posloupnost má nevlastní limitu, tedy buď  $\lim a_n = +\infty$  nebo  $\lim a_n = -\infty$

**Příklady:** 1)  $\lim \frac{1}{n} \sin n \frac{\pi}{2}$ , 2)  $\lim \sin n \frac{\pi}{2}$ , 3)  $\lim n \sin \frac{\pi}{2}$

## II.3. Limita posloupnosti

**Věta:** Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Vybraná podposloupnost z posloupnosti  $\{a_n\}$ :  $\{a_{k_n}\}$ , kde  $\{k_n\}$  je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

**Věta:** Posloupnost  $\{a_n\}$  má limitu  $a$  právě tehdy, když každá vybraná podposloupnost z posloupnosti  $\{a_n\}$  má limitu  $a$ .

**Věta:** Jestliže existují limity posloupností  $\{a_n\}$  a  $\{b_n\}$  a je  $\lim a_n = a$ ,  $\lim b_n = b$ , potom platí

$$1) \lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b,$$

$$2) \lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n = a - b,$$

$$3) \lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n = a \cdot b,$$

pokud výrazy na pravých stranách mají smysl. Pokud navíc pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  mají smysl podíly  $a_n / b_n$  a  $b \neq 0$ , potom je

$$4) \lim (a_n / b_n) = \lim a_n / \lim b_n = a / b.$$



## II.3. Limita posloupnosti

**Příklady:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 1} + n}{\sqrt[3]{3n^2 + 2n - 1}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$

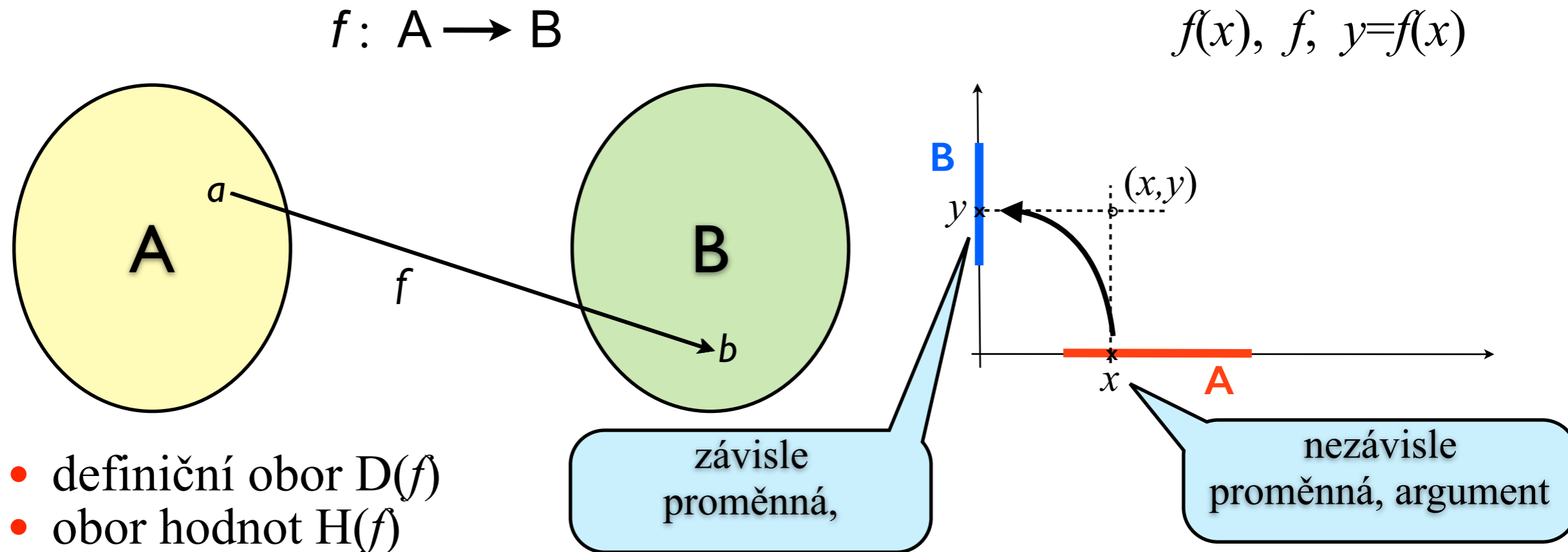
**Věta (o limitě sevřené posloupnosti):** Necht' jsou  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$  takové posloupnosti, pro které platí

- i)  $\lim \{a_n\} = \lim \{c_n\} = a$ ,
  - ii)  $\exists n_0 \in \mathbf{N}: \forall n \in \mathbf{N} (n \geq n_0) \Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n$ .
- Potom je  $\lim \{b_n\} = a$ .

**Příklad:** Ukažte, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

**Věta:** Zdola omezená nerostoucí posloupnost má vždy limitu.  
Podobně shora omezená neklesající posloupnost má vždy limitu.

## II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné



- definiční obor  $D(f)$
- obor hodnot  $H(f)$
- graf funkce  $G(f)$

• Reálnou funkci budeme vždy chápat jako dvojici  $(f, D)$ .

• Funkce  $(f, D)$  a  $(f, B)$ , kde  $D \neq B$  jsou dvě různé funkce. Je-li  $B \subset D$ , říkáme, že  $(f, B)$  je *zúžením* funkce  $(f, D)$ .

• je-li funkce prostá, potom existuje funkce inverzní:  $x = f^{-1}(y)$

Je-li  $D(f) = A$  a  $H(f) = B$ , potom je  $D(f^{-1}) = B$  a  $H(f^{-1}) = A$

## II.4. Reálná funkce jedné reálné proměnné

Operace s funkcemi:

- součet funkcí  $(f, D)$  a  $(g, C)$ :  $h(x) = f(x) + g(x)$ ,  $x \in D(h) = D \cap C$ ;
- číselný násobek  $(f, D)$ :  $g(x) = k \cdot f(x)$ ,  $x \in D$ ;
- lineární kombinace:  $s(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x)$
- násobení a dělení:  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ ,  $x \in D(h) = D \cap C$ ;  
 $r(x) = f(x)/g(x)$ ,  $D(r) = D \cap \{x \in C \mid g(x) \neq 0\}$ ;
- složení funkcí  $(f, D)$  a  $(g, C)$ :  $y = f(x)$ ,  $z = g(y) \Rightarrow z = g \circ f(x)$ ,  $D(z) = D$

funkce vnější

funkce vnitřní

Funkci  $y = f(x)$  nazýváme

- *sudou*  $\Leftrightarrow \forall x \in D(f): (-x) \in D(f) \wedge f(x) = f(-x)$ ;
- *lichou*  $\Leftrightarrow \forall x \in D(f): (-x) \in D(f) \wedge f(x) = -f(-x)$ ;
- *periodickou*  $\Leftrightarrow \exists p \in \mathbf{R} \forall x \in D(f): (x \pm p) \in D(f) \wedge f(x) = f(x \pm p)$

## II.4. Lokální vlastnosti funkce

Lokální vlastnost = vlastnost "v bodě" (zprava, zleva)

- *(ryze) rostoucí* v bodě  $x_0 \in D(f)$   $\Leftrightarrow$   
$$\exists \varepsilon > 0 \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
- *neklesající* v bodě  $x_0 \in D(f)$   $\Leftrightarrow$   
$$\exists \varepsilon > 0 \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$
- *(ryze) klesající* v bodě  $x_0 \in D(f)$   $\Leftrightarrow$   
$$\exists \varepsilon > 0 \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$
- *nerostoucí* v bodě  $x_0 \in D(f)$   $\Leftrightarrow$   
$$\exists \varepsilon > 0 \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$
- *monotónní* v bodě  $x_0 \in D(f)$ , je-li v tomto bodě nerostoucí nebo neklesající;
- *ryze monotónní* v bodě  $x_0 \in D(f)$ , je-li v tomto bodě rostoucí nebo klesající;

Pokud v těchto definicích nahradíme okolí  $U_\varepsilon(x_0)$  levým okolím  $U_\varepsilon^-(x)$ , resp. pravým okolím  $U_\varepsilon^+(x)$ , budeme hovořit o vlastnosti "zleva", resp. "zprava".

## II.4. Globální vlastnosti funkce

Globální vlastnosti = vlastnost na nějaké množině  $M \subset D(f)$

- *(ryze) rostoucí* (případně *neklesající*, *ryze klesající*, *nerostoucí*, *monotónní* či *ryze monotónní*) na množině  $M \Leftrightarrow$  má-li tuto vlastnost v každém bodě množiny  $M$ ;
- *omezenou shora na množině*  $M \Leftrightarrow \exists K \in \mathbf{R} \forall x \in M: f(x) \leq K$  ;
- *omezenou zdola na množině*  $M \Leftrightarrow \exists K \in \mathbf{R} \forall x \in M: f(x) \geq K$  ;
- *omezenou na množině*  $M$ , je-li tato funkce omezená shora i zdola na množině  $M$ ;
- *konstantní*, je-li nerostoucí a zároveň neklesající.

Pokud pouze řekneme, že funkce je rostoucí (případně neklesající, klesající, nerostoucí, monotónní, ryze monotónní, omezená či konstantní), rozumíme tím, že má tuto vlastnost na celém svém definičním oboru  $D(f)$ .

## II.4. Extrémy funkce

Říkáme, že funkce nabývá v bodě  $x_0 \in D(f)$  svého:

- *ostrého lokálního minima*  $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): f(x_0) < f(x)$ ;
- *ostrého lokálního maxima*  $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): f(x_0) > f(x)$ ;
- *lokálního minima*  $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): f(x_0) \leq f(x)$ ;
- *lokálního maxima*  $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D(f): f(x_0) \geq f(x)$ ;

Pokud nastane některý z výše uvedených případů, říkáme, že funkce nabývá v bodě  $x_0 \in D(f)$  svého (ostrého či neostrého) *lokálního extrému*.

Pokud nastane některý z výše uvedených případů, říkáme, že funkce nabývá v bodě  $x_0 \in D(f)$  svého (ostrého či neostrého) *lokálního extrému*.

## II.4. Extrémy funkce

Říkáme, že funkce nabývá na množině  $M \subset D(f)$  svého extrému, pokud nastane některá z následujících situací:

- *ostré minimum na množině*  $M \Leftrightarrow \exists x_0 \in M \forall x \in M: f(x_0) < f(x)$ ;
- *ostré maximum na množině*  $M \Leftrightarrow \exists x_0 \in M \forall x \in M: f(x_0) > f(x)$ ;
- *minimum na množině*  $M \Leftrightarrow \exists x_0 \in M \forall x \in M: f(x_0) \leq f(x)$ ;
- *maximum na množině*  $M \Leftrightarrow \exists x_0 \in M \forall x \in M: f(x_0) \geq f(x)$ ;

Pokud je  $M = D(f)$ , hovoříme o "globálních" extrémech funkce.

$$f(x_0) = \min_{x \in M} f(x)$$

$$x_0 = \arg \min_{x \in M} f(x)$$

$$f(x_0) = \min_M f(x)$$

$$x_0 = \arg \min_M f(x)$$

$$f(x_0) = \min f(x)$$

$$x_0 = \arg \min f(x)$$

## II.4. Extrémy funkce

Označme  $f(M) = \{y \in \mathbf{R}: y = f(x), x \in M\}$  množinu všech hodnot funkce  $f$  na množině  $M$ .

Hodnotu  $\sup (f(M))$  nazýváme *supremem* funkce  $f$  na množině  $M$ .  
Podobně  $\inf (f(M))$  nazveme *infimem* funkce  $f$  na množině  $M$ .

$$y = \sup_{x \in M} f(x)$$

$$y = \sup_M f(x)$$

$$y = \sup f(x)$$

$$y = \inf_{x \in M} f(x)$$

$$y = \inf_M f(x)$$

$$y = \inf f(x)$$

- supremum a infimum jsou pouze globální pojmy (nedefinují se lokálně)
- maximum ani minimum funkce nemusí existovat ani v lokální formě, ani ve formě globální a to ani pro omezenou funkci;
- supremum a infimum funkce existuje vždy;
- pokud existuje minimum nebo maximum, potom je  $\min f = \inf f$  a  $\max f = \sup f$



## II.5. Elementární funkce

- |                         |                           |
|-------------------------|---------------------------|
| a) mocninné funkce      | d) goniometrické funkce   |
| b) exponenciální funkce | e) cyklometrické funkce   |
| c) logaritmické funkce  | f) funkce $\text{sgn}(x)$ |
- 

a) Mocninné funkce:  $f(x) = x^a$ ,  $a \in \mathbf{R}$

- $a = 0 \Rightarrow f(x) = 1$  - konstantní funkce
  - $a \in \mathbf{N} \Rightarrow$  přirozená mocnina
- }  $D(f) = \mathbf{R}$
- lineární kombinace konstanty a přirozených mocnin  $\Rightarrow$  *polynomické funkce*
  - je-li  $a$  celé záporné, potom definiční obor nesmí obsahovat nulu
  - pro  $a \in \mathbf{R}$  je  $D(f) = (0, \infty)$
  - dodefinujeme-li  $0^a = 0$ , pak pro  $a > 0$  je  $D(f) = \langle 0, \infty \rangle$
  - pro  $a = p/q$ , kde  $p \in \mathbf{Z}$ ,  $q \in \mathbf{N}$  liché, lze definiční obor rozšířit i na  $x < 0$ .

## II.5. Elementární funkce

b) Exponenciální funkce:  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$

- $D(f) = \mathbf{R}$ ,  $H(f) = (0, \infty)$
- je monotónní: pro  $a < 1$  je klesající, pro  $a > 1$  je rostoucí
- $a = 1 \Rightarrow f(x) = 1$  - konstantní funkce
- $a = e \Rightarrow$  přirozená exponenciální funkce a značíme ji  $y = \exp(x)$   
( $e =$  Eulerova konstanta)  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$   $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

c) Logaritmické funkce:  $f(x) = \log_a(x)$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$

- $D(f) = (0, \infty)$ ,  $H(f) = \mathbf{R}$
- je monotónní: pro  $a < 1$  je klesající, pro  $a > 1$  je rostoucí
- $a = e \Rightarrow$  přirozený logaritmus a značíme ji  $y = \ln(x)$
- $a = 10 \Rightarrow$  dekadický logaritmus

Funkce exponenciální a logaritmické jsou navzájem inverzní. Platí  
 $x = \log_a(y) \Leftrightarrow y = a^x$  nebo též  $\log_a(a^x) = x$

## II.5. Elementární funkce

d) Goniometrické funkce:  $f(x) = \sin(x)$ ,  $f(x) = \cos(x)$ ,

- $D(f) = \mathbf{R}$ ,  $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
- jsou periodické s periodou  $2\pi$ , sinus je lichá, kosinus je sudá funkce
- podílem dostaneme funkce tangens a kotangens:

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

e) Cyklometrické funkce:  $f(x) = \arcsin(x)$ ,  $f(x) = \arccos(x)$

- zúžíme-li funkci sinus na interval  $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ , potom inverzní funkce k této funkci je  $\arcsin(x)$ ,  $x \in \langle -1, 1 \rangle$
- zúžíme-li funkci kosinus na interval  $\langle 0, \pi \rangle$ , potom inverzní funkce k této funkci je  $\arccos(x)$ ,  $x \in \langle -1, 1 \rangle$
- $\operatorname{arctg}(x)$ ,  $\operatorname{arccotg}(x)$  jsou inverzní funkce k jedné větvi  $\operatorname{tg}(x)$ ,  $\operatorname{cotg}(x)$

Funkce goniometrické zúžené na jednu periodu a funkce cyklometrické jsou navzájem inverzní.

## II.5. Elementární funkce

f) Funkce signum:  $f(x) = \text{sgn}(x)$

- $D(f) = \mathbf{R}$ ,  $H(f) = \{-1, 0, 1\}$

- $\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0. \end{cases}$

- funkce absolutní hodnota:  $|x| = x \cdot \text{sgn}(x)$

Ostatní funkce, se kterými budeme pracovat, vznikají jako lineární kombinace, součin, podíl či složení těchto elementárních funkcí.

## II.6. Limita funkce

**Definice 1:** Číslo  $a \in \mathbf{R}^*$  nazýváme *limitou funkce*  $f$  v bodě  $x_0 \in D(f)$ , jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in P_\delta(x_0) \quad f(x) \in U_\varepsilon(a)$$

**Definice 2:** Číslo  $a \in \mathbf{R}^*$  nazýváme *limitou funkce*  $f$  v bodě  $x_0 \in D(f)$ , jestliže existuje prstencové okolí  $P_\delta(x_0)$  bodu  $x_0$  tak, že pro každou posloupnost  $\{x_n\}$  v tomto okolí platí

$$\lim x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim f(x_n) = a$$

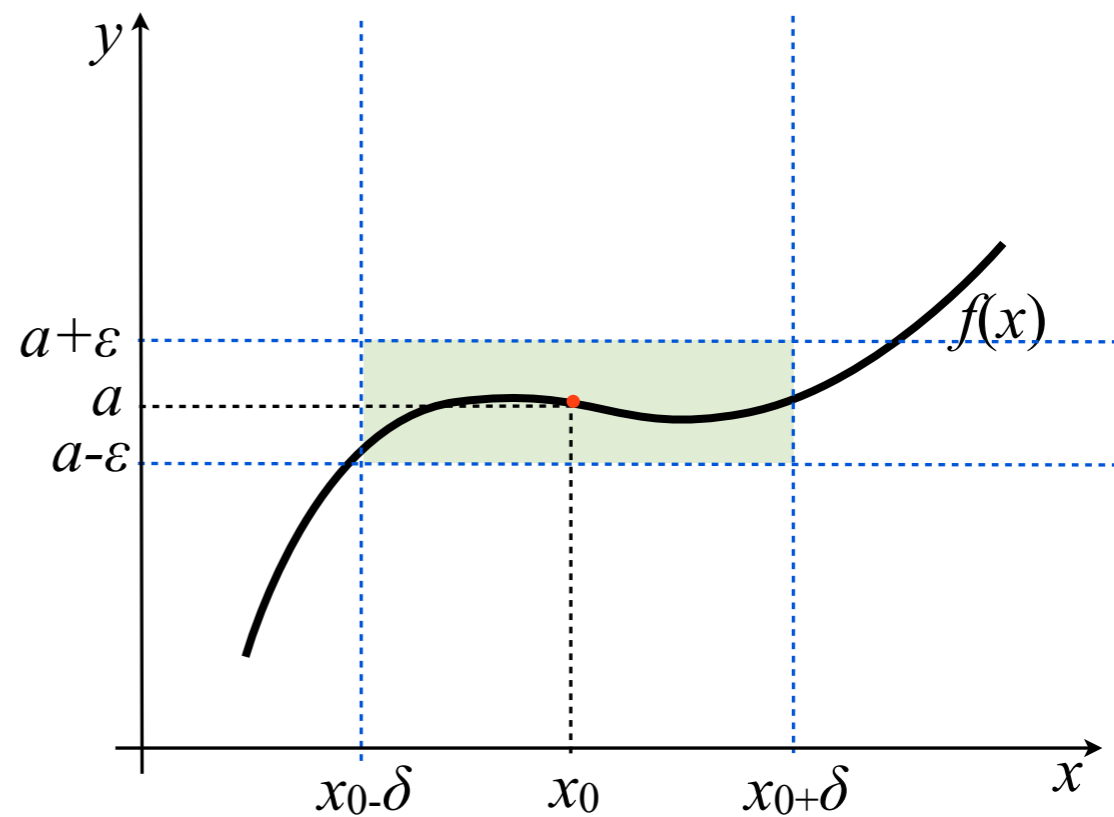
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

**Věta:** Funkce může mít v jednom bodě nejvýše jednu limitu.

**Příklady:** 1)  $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 2x + 1)$ , 2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$ , 3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 2)$

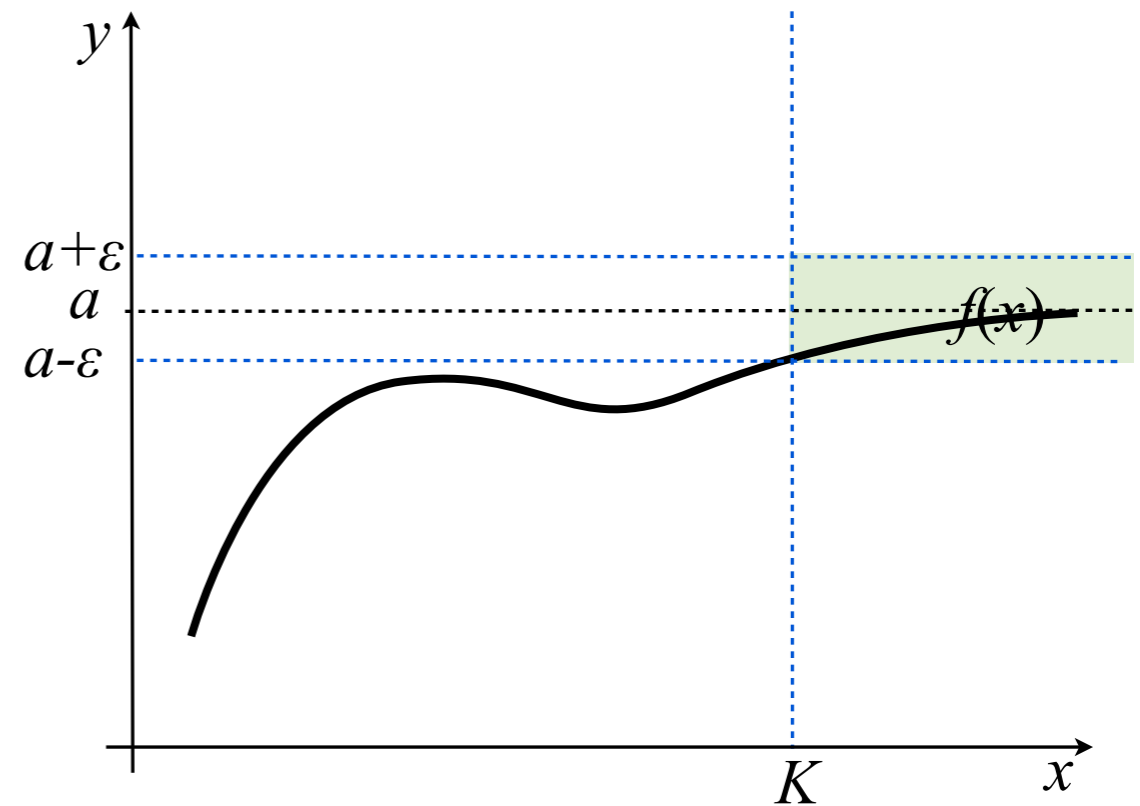
## II.6. Limita funkce

- *vlastní limita ve vlastním bodě*  
(  $x_0 \in \mathbf{R}$ ,  $a \in \mathbf{R}$  )



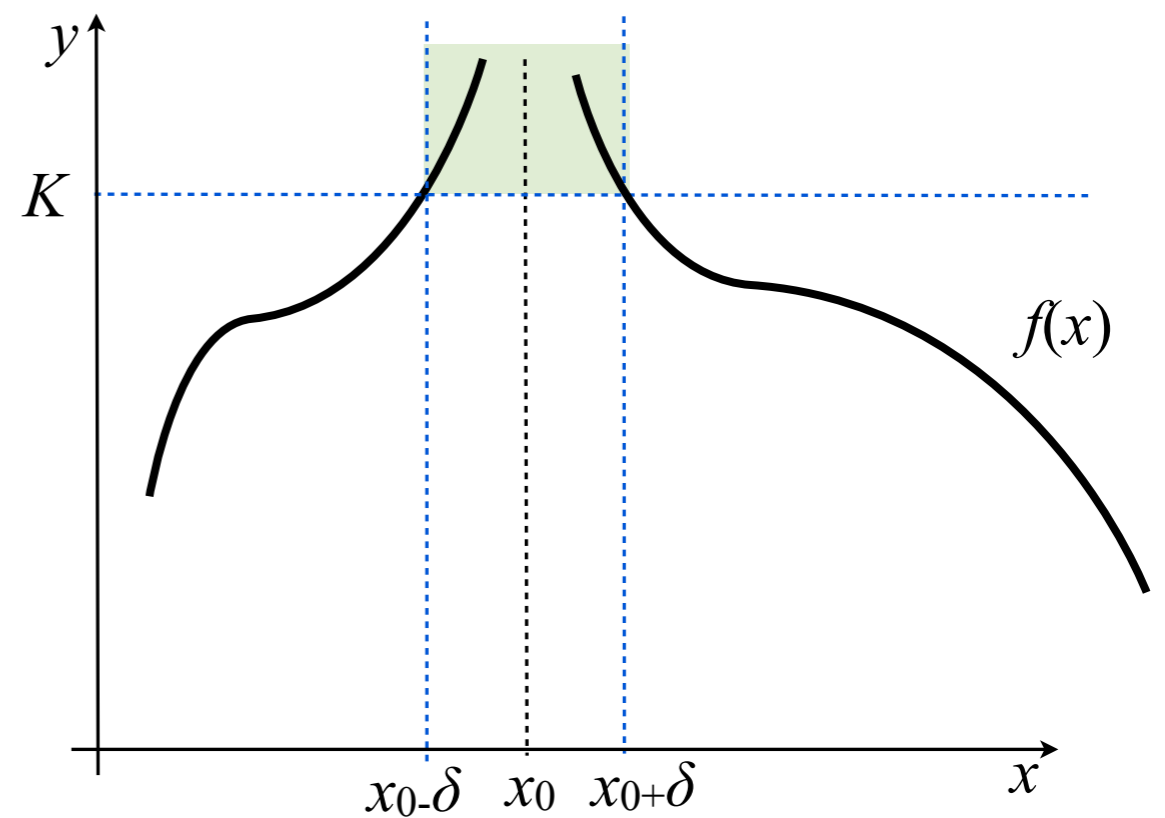
## II.6. Limita funkce

- *vlastní limita ve vlastním bodě*  
(  $x_0 \in \mathbf{R}$ ,  $a \in \mathbf{R}$  )
- *vlastní limita v nevlastním bodě*  
(  $x_0 = \pm\infty$ ,  $a \in \mathbf{R}$  )



## II.6. Limita funkce

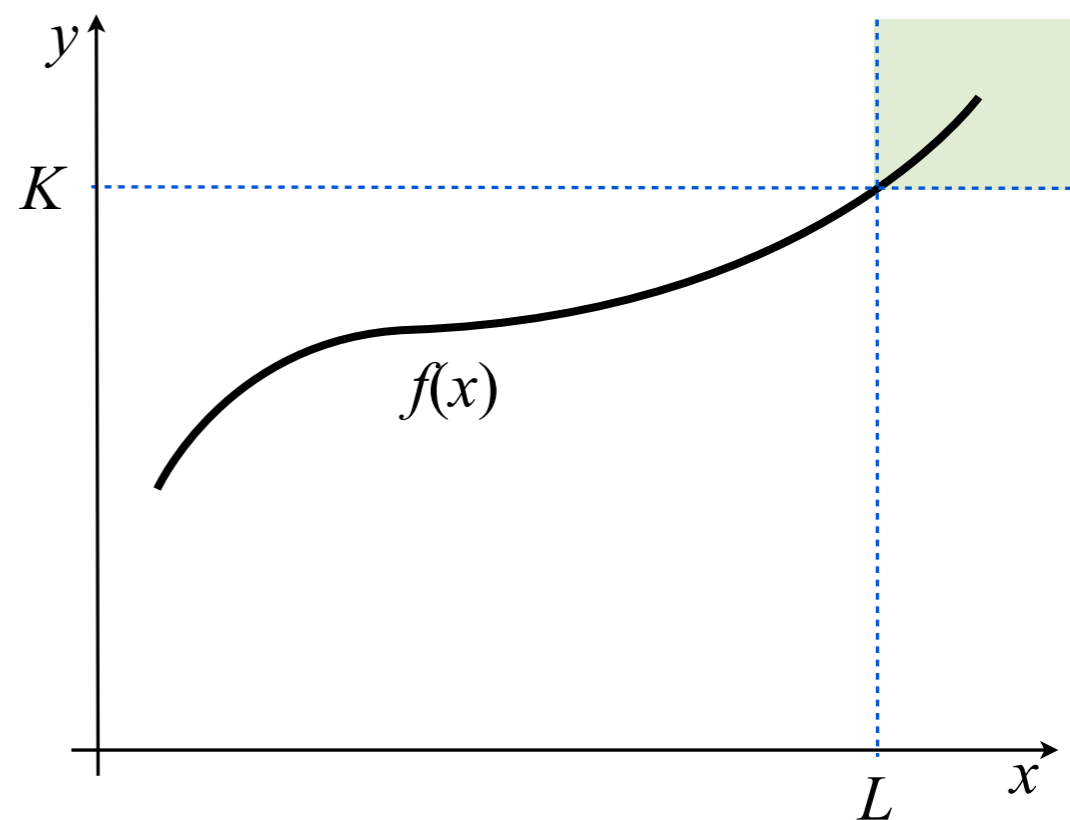
- *vlastní limita ve vlastním bodě*  
(  $x_0 \in \mathbf{R}$ ,  $a \in \mathbf{R}$  )
- *vlastní limita v nevlastním bodě*  
(  $x_0 = \pm\infty$ ,  $a \in \mathbf{R}$  )
- *nevlastní limita ve vlastním bodě*  
(  $x_0 \in \mathbf{R}$ ,  $a = \pm\infty$  )





## II.6. Limita funkce

- *vlastní limita ve vlastním bodě*  
(  $x_0 \in \mathbf{R}$ ,  $a \in \mathbf{R}$  )
- *vlastní limita v nevlastním bodě*  
(  $x_0 = \pm\infty$ ,  $a \in \mathbf{R}$  )
- *nevlastní limita ve vlastním bodě*  
(  $x_0 \in \mathbf{R}$ ,  $a = \pm\infty$  )
- *nevlastní limita v nevlastním bodě*  
(  $x_0 = \pm\infty$ ,  $a = \pm\infty$  )



## II.6. Limita funkce

**Věta (o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí):**

Necht'  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  a  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ . Pak platí:

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b$ ,

b)  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b$ ,

c)  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = a/b$ ,

pokud výrazy na pravé straně mají smysl.

**Věta (o limitě složené funkce):** Má-li funkce  $g$  limitu  $\pm\infty$  v bodě  $x_0 \in \mathbf{R}^*$  a funkce  $f$  má v  $\pm\infty$  limitu rovnou číslu  $L$ , potom je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = L$$

## II.6. Jednostranné limity funkce

**Definice 1:** Číslo  $a \in \mathbf{R}^*$  nazýváme *limitou funkce  $f$*  v bodě  $x_0 \in D(f)$ , jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in P_\delta(x_0) \quad f(x) \in U_\varepsilon(a)$$

**Definice 2:** Číslo  $a \in \mathbf{R}^*$  nazýváme *limitou funkce  $f$*  v bodě  $x_0 \in D(f)$ , jestliže existuje prstencové okolí  $P_\delta(x_0)$  bodu  $x_0$  tak, že pro každou posloupnost  $\{x_n\}$  v tomto okolí platí

$$\lim x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim f(x_n) = a$$

Nahradíme-li v definici prstencové  $\delta$ -okolí levým nebo pravým  $\delta$ -okolím, budeme hovořit o jednostranné *limitě zleva* nebo *limitě zprava* v bodě  $x_0$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \qquad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$$

**Věta:** Funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  limitu rovnou číslu  $a$  právě když má v tomto bodě limitu zleva a zároveň limitu zprava a obě jsou rovné  $a$ .

## II.7. Spojitost funkce

**Definice:** Řekneme, že funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0 \in D(f)$ , jestliže platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Nahradíme-li v této definici oboustrannou limitu limitou jednostrannou, potom hovoříme o *spojitosti zleva* nebo *spojitosti zprava* v bodě  $x_0$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = f(x_0) \qquad \lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x) = f(x_0)$$

Spojitost funkce v bodě  $x_0$  je lokální vlastností funkce. Globálně lze definovat spojitost funkce na nějaké množině  $M \subset D(f)$ :

Vnitřek množiny  $M \subset \mathbf{R}$  je množina  $\text{Int}(M) = \{x \in M : \exists \delta > 0 \ U_\delta(x) \subset M\}$ .

**Definice:** Řekneme, že funkce  $f$  je spojitá na množině  $M \subset D(f)$ , pokud je (oboustranně)spojitá v každém vnitřním bodě  $x_0 \in \text{Int}(M)$  a jednostranně spojitá v jejích krajních bodech.

## II.7. Spojitost funkce

**Věta (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí):** Jsou-li funkce  $f$  a  $g$  spojité v bodě  $x_0 \in D(f) \cap D(g)$ , potom také funkce  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$  a  $|f|$  jsou spojité v tomto bodě. Je-li navíc  $g(x_0) \neq 0$ , potom i podíl  $f/g$  je spojitá funkce v bodě  $x_0$ .

Uvedená věta platí i pro spojitost zleva, spojitost zprava a spojitost na intervalu.

Všechny elementární funkce a jejich lineární kombinace jsou spojité na svých definičních oborech. Výjimkou je funkce  $\text{sgn}$ , která je jediná nespojitá na každém intervalu, obsahujícím nulu.

**Věta (o spojitosti složené funkce):** Platí-li, že funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0 \in D(f)$  a funkce  $g$  je spojitá v bodě  $f(x_0) \in D(g)$ , potom je spojitá i funkce složená  $h = g \circ f$  v bodě  $x_0$ .

Je-li funkce  $f$  spojitá v intervalu  $M$ , funkce  $g$  je spojitá v intervalu  $H$  a platí, že  $f(M) \subset H$ , potom je spojitá i funkce složená  $h = g \circ f$  v  $M$ .

## II.7. Spojitost funkce

**Věta (Darbouxova vlastnost):** Je-li funkce  $f$  spojitá v intervalu  $I$ , potom pro každé dva body  $x_1$  a  $x_2$  z  $I$  pro něž je  $f(x_1) \leq f(x_2)$  platí, že ke každému číslu  $\eta$  takovému, že  $f(x_1) \leq \eta \leq f(x_2)$  existuje číslo  $\xi$  tak, že  $f(\xi) = \eta$ .

Důsledky: Pro spojitou funkci na intervalu  $I$  platí

- Existuje-li  $x_0 \in I$  tak, že  $f(x_0) > 0$ , potom existuje prstencové okolí bodu  $x_0$  tak, že  $f(x) > 0$  pro všechna  $x$  z tohoto okolí.
- Jestliže pro dva body  $x_1$  a  $x_2$  z  $I$  platí, že  $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ , potom existuje číslo  $\xi$  ležící mezi body  $x_1$  a  $x_2$  tak, že  $f(\xi) = 0$ .
- $f(I)$  je buď opět interval nebo jednobodová množina (množina  $f(I)$  je souvislá).

**Věta (o spojitosti inverzní funkce):** Je-li funkce  $f$  spojitá a prostá v intervalu  $I$  a je  $f(I) = J$ , potom k ní existuje inverzní funkce která je spojitá na intervalu  $J$ .

## II.7. Spojitost funkce

**Věta (o existenci maxima a minima):** Spojitá funkce v uzavřeném omezeném intervalu nabývá vždy svého maxima i minima.

**Věta (o limitě složené funkce):** Má-li funkce  $g$  vlastní limitu  $\lambda$  ve vlastním bodě  $x_0$  a funkce  $f$  je spojitá v bodě  $\lambda$ , potom platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(\lambda)$$

**Příklady:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$      $\lim_{x \rightarrow \pi} (\sin x)^{\frac{1}{2}}$      $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(x)$      $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sin(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 1}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x - 3} - \sqrt{x})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{2}{x - 1} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x - 1}}{x + 1} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{x - 1} \right)$$

## II.7. Spojitost funkce