

Přírodovědecká fakulta

NÁHODNÉ PROCESY

Ivan Křivý



OSTRAVSKÁ UNIVERZITA 2005

OSTRAVSKÁ UNIVERZITA

NÁHODNÉ PROCESY

Ivan Křivý

ANOTACE

Předkládaná distanční opora představuje úvod do teorie náhodných procesů. Je určena posluchačům distančního studia studijních programů *Aplikovaná matematika* a *Informatika*. Zahrnuje následující témata:

- Náhodné procesy, jejich rozdělení a klasifikace
- Matematický aparát pro studium náhodných procesů
- Větvící se procesy
- Markovovy řetězce s diskrétním časem
- Konečné Markovovy řetězce se spojitým časem
- Spočetné Markovovy řetězce se spojitým časem
- Teorie hromadné obsluhy

ÚVOD	1
1. NÁHODNÉ PROCESY, JEJICH ROZDĚLENÍ	3
A CHARAKTERISTIKY	3
1.1 Definice náhodného procesu	3
1.2. Rozdělení náhodného procesu	4
1.3. Základní charakteristiky náhodného procesu	5
1.4. Klasifikace náhodných procesů	6
1.5. Příklady náhodných procesů	6
2. MATEMATICKÝ APARÁT PRO STUDIUM NÁHODNÝCH PROCESŮ	9
2.1. Vytvořující funkce	9
2.2. Konvoluce	12
2.3. Složené rozdělení	13
3. VĚTVÍCÍ SE PROCESY	17
3.1. Podstata větvícího se procesu	17
3.2. Vytvořující funkce větvícího se procesu	18
3.3. Charakteristiky větvícího se procesu	19
3.4. Pravděpodobnost extinkce větvícího se procesu	20
3.5. Aplikace větvícího se procesu	21
Korespondenční úkol 1	23
4. MARKOVOVY ŘETĚZCE S DISKRÉTNÍM ČASEM	25
4.1. Markovův řetězec a jeho reprezentace	25
4.2. Pravděpodobnosti přechodů vyšších řádů	28
4.3. Pravděpodobnosti stavu systému v daném čase	30
4.4. Rekurentní jevy	30
4.5. Klasifikace stavů Markovova řetězce	31
4.6. Nerozložitelné a rozložitelné Markovovy řetězce	33
4.7. Stacionární rozdělení	37
4.8. Přechodné stavy Markovova řetězce	40
5. KONEČNÉ MARKOVOVY ŘETĚZCE SE SPOJITÝM ČASEM	45
5.1. Definice Markovova řetězce se spojitým časem	45
5.2. Chapmanova-Kolmogorovova rovnost	46
5.3. Konečné Markovovy řetězce se spojitým časem	46
5.4. Klasifikace stavů	47
5.5. Intenzity přechodu a jejich vlastnosti	48
5.6. Kolmogorovovy diferenciální rovnice a jejich řešení	49
5.7. Limitní pravděpodobnosti	50
5.8. Aplikace konečných řetězců se spojitým časem	52
Korespondenční úkol 2	57
6. SPOČETNÉ MARKOVOVY ŘETĚZCE SE SPOJITÝM ČASEM	59
6.1. Zvláštnosti početných Markovových řetězců	59
6.2. Kolmogorovovy diferenciální rovnice a jejich řešení	60
6.3. Limitní pravděpodobnosti	61
6.4. Poissonův proces	61
6.5. Lineární proces množení	63
6.6. Obecný proces množení	65
6.7. Lineární proces množení a zániku	67

6.8. Obecný proces množení a zániku	70
7. TEORIE HROMADNÉ OBSLUHY	73
7.1. Struktura systémů hromadné obsluhy	73
7.2. Vstupní tok požadavků	74
7.3. Mechanismus obsluhy	75
7.4. Režim obsluhy	76
7.5. Režim fronty	76
7.6. Klasifikace systémů hromadné obsluhy	77
7.7. Metody řešení úloh	77
7.8. Systém $(M/M/\infty)$	77
7.9. Systém $(M/M/n)$	79
7.10. Systém $(M/M/1)$	81
Korespondenční úkol 3	85
LITERATURA	87

ÚVOD

Předkládaná distanční opora (modul), která se Vám dostává do ruky, je určena pro jednosemestrální studium náhodných procesů, speciálně Markovových řetězců s diskretním i spojitým časem. Plně pokrývá požadavky učebních osnov povinně volitelného kurzu NAPRO (Náhodné procesy), zařazeného do učebních plánů magisterských studijních oborů *Aplikovaná matematika*, *Aplikace matematiky v ekonomii* a *Informační systémy* na Přírodovědecké fakultě Ostravské univerzity.

Poslání modulu

Cíle modulu:

Po prostudování tohoto modulu

- pochopíte základní pojmy teorie náhodných procesů (náhodný proces a jeho rozdělení, Markovův proces, pravděpodobnosti přechodů, stacionární rozdělení, apod.),
- naučíte se klasifikovat stavy daného náhodného procesu,
- naučíte se počítat pravděpodobnosti přechodu mezi stavy daného náhodného procesu,
- dokážete určit, zda pro daný náhodný proces existuje stacionární (limitní) rozdělení pravděpodobnosti, a také jej spočítat, pokud existuje,
- pochopíte význam náhodných procesů pro řešení konkrétních úloh v praxi.

Celý modul je rozčleněn do následujících lekcí:

- náhodné procesy, jejich rozdělení a charakteristiky,
- matematický aparát pro studium náhodných procesů,
- větvící se procesy,
- Markovovy řetězce s diskretním časem,
- konečné Markovovy řetězce se spojitým časem,
- spočetné Markovovy řetězce se spojitým časem,
- teorie hromadné obsluhy.

Obsah modulu

U jednotlivých lekcí jsou dodržena následující pravidla:

- je specifikován cíl lekce (tedy to, co by měl student po jejím prostudování umět, znát, pochopit),
- vlastní výklad učiva, popř. otázky k textu,
- řešené příklady,
- kontrolní úkoly (otázky, příklady) k procvičení učiva,
- korespondenční úkoly.

Struktura modulu

Všechny tři zařazené korespondenční úkoly mají charakter individuální seminární práce, která je určena k ověření Vašich schopností aplikovat získané znalosti na analýzu konkrétního (Vámi vybraného) náhodného procesu. Součástí Vašich studijních povinností je splnění jednoho z korespondenčních úkolů; jeho hodnocení bude započteno do celkového hodnocení kurzu.



V každé kapitole je uvedeno vše potřebné pro samostatné studium, počínaje definicemi základních pojmů a konče využitím teoretických poznatků v praxi. V zájmu správného pochopení probírané látky jsou jednotlivá témata doplněna řešením typových příkladů. Doporučujeme čtenáři, aby se nad každým příkladem důkladně zamyslel. Pochopení principů řešení je totiž nezbytným předpokladem pro porozumění dalšímu výkladu.

Čas potřebný k prostudování jednotlivých lekcí explicitně neuvádíme, neboť z našich zkušeností vyplývá, že rychlost studia značně záleží na Vašich schopnostech a studijních návycích.



Předpokládáme, že si mnozí z Vás budou chtít doplnit a rozšířit poznatky studiem dalších literárních pramenů (učebnic a skript), jež se zabývají jak teorií, tak i aplikacemi náhodných procesů. Při výkladu jsme vycházeli především z monografie Feller [5] a dvoudílných skript manželů Dupačových [3,4]. Další doporučenou literaturu uvádíme v závěrečné části této distanční opory. Věříme, že Vám předkládaný studijní materiál pomůže pochopit základní principy teorie náhodných procesů, a přejeme Vám hodně úspěchů ve studiu.

Autor

Autoři děkují touto cestou oběma recenzentům (PaedDr. Hashimu Habibalovi, PhD, a RNDr. Anně Madryové, PhD) za pečlivé pročtení rukopisu a řadu cenných připomínek směřujících ke zkvalitnění předkládaného učebního textu.

1. NÁHODNÉ PROCESY, JEJICH ROZDĚLENÍ A CHARAKTERISTIKY

Po prostudování této úvodní kapitoly:

- pochopíte základní pojmy teorie náhodných (stochastických) procesů (náhodný proces a jeho rozdělení) a jejich návaznost na základní pojmy klasické teorie pravděpodobnosti (náhodná veličina a její rozdělení),
- poznáte nejvýznamnější charakteristiky náhodných procesů, zejména střední hodnotu, rozptyl a autokovarianční funkci,
- seznámíte se s klasifikací náhodných procesů,
- poznáte některé významné typy náhodných procesů.

Úvodní kapitola je věnována základům obecné teorie náhodných procesů. Nejprve zavádíme pojem náhodného procesu, jeho rozdělení a základních charakteristik. Následuje klasifikace náhodných procesů, zejména podle struktury množiny jeho stavů a časové množiny. Na závěr pak uvádíme příklady některých významných typů náhodných procesů.



1.1 Definice náhodného procesu

Náhodný (stochastický) proces je abstraktní pojem pro matematický popis náhodných jevů, které jsou navíc funkcí času. Náhodné procesy tak vyjadřují dynamiku náhodných jevů, proto se často mluví o tzv. statistické dynamice.

Příklady náhodných procesů nacházíme ve všech oblastech vědy a techniky: kolísání signálu v přijímacím zařízení, Brownův pohyb hmotných částic, změny v počtu zákazníků čekajících na obsluhu, změny v počtu kosmických částic dopadajících na povrch Země, kolísání sluneční aktivity apod.

Teorie náhodných procesů je, např. ve srovnání s matematickou analýzou nebo teorií pravděpodobnosti, poměrně mladá matematická disciplína. Její základy byly položeny v první polovině minulého století především zásluhou prací Markova, Sluckého, Kolmogorova, Činčina, Craméra a Loèveho. Za zakladatele moderní teorie náhodných procesů jsou považováni Ito a Karhunen. K dalšímu rozvoji teorie pak významně přispěli zejména Frechét, Lévy, Feller a Wiener. Více podrobností nalezne čtenář ve skriptech [8].

Definice 1.1. Necht' (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor a T neprázdná podmnožina \mathbb{R} . Pak soustava reálných náhodných veličin $\{X_t, t \in T\}$ definovaných na (Ω, \mathcal{A}, P) se nazývá reálný **náhodný proces**.

Náhodný proces

Poznámka 1. Náhodný proces můžeme také definovat jako zobrazení $X: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro každé $t \in T$ je $X_t(\omega)$ náhodná veličina na (Ω, \mathcal{A}, P) .

Poznámka 2. V aplikacích vystačíme s reálnými náhodnými veličinami, v teorii je však někdy výhodné analogicky definovat analogicky komplexní náhodný proces.

Náhodný proces můžeme považovat za funkci dvou proměnných: elementárního jevu ω a časové proměnné t . Pro pevně zvolené $t \in T$ je $X_t = X_t(\cdot)$ náhodná veličina definovaná na Ω . Pro pevně zvolené $\omega \in \Omega$ je $X_{(\cdot)}(\omega)$ reálná funkce času t ; tato funkce se nazývá **trajektorie (realizace)** náhodného procesu.

V aplikacích se pomocí náhodného procesu popisuje chování nějakého systému v čase, přičemž přechody z jednoho stavu systému do druhého mají náhodný charakter. V takovém případě se stav systému ztotožňuje s hodnotou náhodného procesu.

1.2. Rozdělení náhodného procesu

V tomto odstavci zavedeme pojem distribuční funkce náhodného procesu.

Definice 1.2. Necht' $\{X_t, t \in T\}$ je daný náhodný proces. Dále necht' $n \in \mathbb{N}$ a $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$. Pak distribuční funkce náhodného vektoru $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ definovaná předpisem

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} < x_1, X_{t_2} < x_2, \dots, X_{t_n} < x_n)$$

Distribuční funkce
náhodného procesu

se nazývá **n -rozměrná distribuční funkce náhodného procesu** $\{X_t, t \in T\}$, jestliže jsou splněny tzv. Kolmogorovovy podmínky konzistence:

a) Pro libovolnou permutaci π množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ platí

$$F_{t_{\pi(1)}, t_{\pi(2)}, \dots, t_{\pi(n)}}(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)}) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n).$$

b) n -rozměrná distribuční funkce náhodného procesu je marginální distribuční funkcí $(n+1)$ -rozměrné distribuční funkce náhodného procesu, tj.

$$\lim_{x_{n+1} \rightarrow \infty} F_{t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}}(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n).$$

K pravděpodobnostnímu popisu náhodného procesu je nutno znát jeho distribuční funkce pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Ke každému náhodnému procesu existuje konzistentní systém distribučních funkcí.



Věta 1.1. (Kolmogorovova věta). Necht' $\{F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ je konzistentní systém distribučních funkcí. Pak existuje náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ takový, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, libovolná $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ a libovolná reálná x_1, x_2, \dots, x_n platí

$$P(X_{t_1} < x_1, X_{t_2} < x_2, \dots, X_{t_n} < x_n) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Důkaz je uveden např. v učebnici Štěpána [16], věta I.10.3.

1.3. Základní charakteristiky náhodného procesu

Nejprve definujeme tři základní charakteristiky náhodného procesu, a to střední hodnotu, rozptyl a autokovarianční funkci.

Definice 1.2. Necht' $\{X_t, t \in T\}$ je náhodný proces takový, že pro každé $t \in T$ existuje střední hodnota $\mathbf{E}X_t$. Pak funkce $\mu_t = \mathbf{E}X_t$ definovaná na množině T se nazývá **střední hodnota náhodného procesu** $\{X_t, t \in T\}$.

Střední hodnota
náhodného procesu

Definice 1.3. Necht' $\{X_t, t \in T\}$ je náhodný proces takový, že pro všechna $t \in T$ platí $\mathbf{E}|X_t|^2 < +\infty$. Pak funkce dvou proměnných $R(s, t)$ definovaná na množině $T \times T$ předpisem

$$R(s, t) = \mathbf{E}[(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)]$$

Autokovarianční
funkce

se nazývá **autokovarianční funkce náhodného procesu** $\{X_t, t \in T\}$.

Speciálně, hodnota $R(t, t)$ této funkce se nazývá **rozptyl náhodného procesu** v čase t .

Rozptyl náhodného
procesu

V této části ještě zavedeme pojmy stacionarita a spojitost náhodného procesu.

Definice 1.4. Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je **striktně stacionární**, jestliže pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, pro libovolná reálná x_1, x_2, \dots, x_n a pro libovolná t_1, t_2, \dots, t_n a h taková, že $t_k \in T$, $t_k + h \in T$, $1 \leq k \leq n$ platí

Striktní stacionarita

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1+h, t_2+h, \dots, t_n+h}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Z uvedené definice vyplývá, že všechny náhodné veličiny X_t mají identické rozdělení a jejich základní charakteristiky (střední hodnota, rozptyl a autokovarianční funkce) jsou invariantní vůči posunutí v čase. Procesy, které nejsou striktně stacionární, se nazývají evoluční.

Kromě striktní stacionarity se pro procesy s konečnými momenty druhého řádu zavádí i slabší pojem tzv. slabé stacionarity. Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je **slabě stacionární**, jestliže jeho střední hodnota a rozptyl jsou konstantní v čase a jeho autokovarianční funkce je invariantní vůči posunutí v čase.

Slabá stacionarita

Definice 1.5. Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je **stochasticky spojitý** (spojitý podle pravděpodobnosti) v bodě $t_0 \in T$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$P(|X_t - X_{t_0}| > \varepsilon) = 0.$$

Náhodný proces je **stochasticky spojitý**, je-li spojitý v každém bodě množiny T .

Spojitost procesu

Proces, který je spojitý podle předcházející definice, nemusí mít spojitě trajektorie.

1.4. Klasifikace náhodných procesů

Náhodné procesy můžeme klasifikovat z různých hledisek.

Proces
s diskretním časem

Podle struktury časové množiny T rozlišujeme:

- **proces s diskretním časem** (časová řada), když $T = \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ nebo $T = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$;

Proces se spojitým
časem

- **proces se spojitým časem**, když prvky množiny T nabývají hodnot z nějakého nedegenerovaného intervalu, tj. $T = [a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Proces
s diskretními stavy

Podle struktury množiny stavů (stavového prostoru) rozeznáváme:

- **proces s diskretními stavy**, když náhodné veličiny X_t nabývají pouze diskretních hodnot,
- **proces se spojitými stavy**, když náhodné veličiny X_t nabývají hodnot z nějakého nedegenerovaného intervalu.

Proces se spojitými
stavy

Podle typu závislosti náhodných veličin X_t pro různé hodnoty t lze např. rozlišit (podrobněji viz [8]):

- **proces s nezávislými hodnotami**, právě když pro všechna $s, t \in T$, $s \neq t$, jsou náhodné veličiny X_s, X_t nezávislé;
- **proces s nekorelovanými hodnotami**, právě když pro všechna $s, t \in T$, $s \neq t$, platí $\mathbf{E}(X_s X_t) = \mathbf{E}X_s \mathbf{E}X_t$ (předpoklad $\mathbf{E}|X_t|^2 < +\infty$);
- **proces s nezávislými přírůstky**, právě když pro všechna t_1, t_2, \dots, t_n , $n \geq 3$, $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, platí, že rozdíly $X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ jsou nezávislé veličiny.

1.5. Příklady náhodných procesů

Bílý šum

Bílý šum je náhodný proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ tvořený nezávislými náhodnými veličinami s nulovou střední hodnotou a stejným konečným rozptylem.

Nechť Y_1, Y_2, \dots jsou nezávislé náhodné veličiny nabývající hodnot ± 1

s pravděpodobnostmi $1/2$. Nechť $X_0 = 0$ a $X_n = \sum_{j=1}^n Y_j$ pro všechna

Náhodná procházka
po přímce

$n \in \mathbb{N}$. Náhodná veličina X_n pak udává polohu, kterou má částice pohybující se náhodně po celočíselných krocích na přímce, a to ve všech krocích se stejnou pravděpodobností v obou směrech. Takový proces $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ se nazývá **náhodná procházka po přímce**.

Brownův pohyb

Wienerův proces (Brownův pohyb) je náhodný proces $\{W_t, t \geq 0\}$ se spojitými trajektoriemi, který má následující tři vlastnosti:

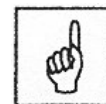
1. $W_0 = 0$,
2. přírůstky $W_t - W_s$, $0 \leq s < t$, mají normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\sigma^2(t-s)$, kde σ^2 je kladná konstanta,

3. pro libovolné disjunktní intervaly (s_k, t_k) , $0 \leq s_k < t_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, jsou přírůstky $X_{t_k} - X_{s_k}$ nezávislé náhodné veličiny.

Uvedené příklady procesů patří do rozsáhlé třídy náhodných procesů, kterým se říká **Markovovy procesy**. Problematice Markovových procesů budou v tomto studijním textu věnovány kapitoly 4 – 7.

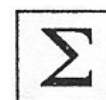
Pojmy k zapamatování:

- náhodný proces,
- trajektorie (realizace) náhodného procesu,
- distribuční funkce náhodného procesu,
- střední hodnota náhodného procesu,
- rozptyl náhodného procesu,
- autokovarianční funkce náhodného procesu,
- stacionarita náhodného procesu,
- spojitost náhodného procesu,
- náhodný proces s diskrétním časem,
- náhodný proces se spojitým časem,
- náhodný proces s diskrétními stavy,
- náhodný proces se spojitými stavy,
- bílý šum,
- náhodná procházka po přímce,
- Brownův pohyb (Wienerův proces).



Shrnutí

Tato kapitola obsahuje základy obecné teorie náhodných procesů. Jsou v ní především definovány pojmy náhodný proces, jeho trajektorie (realizace), rozdělení (systém distribučních funkcí splňujících Kolmogorovovy podmínky konzistence) a základní charakteristiky (střední hodnota, rozptyl, autokovarianční funkce). Kapitola je také doplněna o klasifikaci náhodných procesů (zejména podle struktury časové množiny a struktury množiny stavů procesu) a příklady některých významnějších náhodných procesů (bílý šum, větvící se proces a Brownův pohyb).



2. MATEMATICKÝ APARÁT PRO STUDIUM NÁHODNÝCH PROCESŮ

Po prostudování této kapitoly:

- pochopíte význam vytvořující funkce pro studium celočíselných náhodných veličin,
- naučíte se pomocí vytvořující funkce počítat základní teoretické charakteristiky celočíselných náhodných veličin (střední hodnotu a rozptyl),
- naučíte se také konstruovat vytvořující funkce pro konvoluci celočíselných náhodných veličin a pro tzv. složená rozdělení.

V úvodní části této kapitoly jsou uvedeny definice dvou základních pojmů (celočíslná náhodná veličina a její vytvořující funkce). Zvláštní pozornost je přitom věnována využití vytvořující funkce pro výpočet střední hodnoty a rozptylu celočíselné náhodné veličiny. Sami se můžete přesvědčit o tom, že pomocí vytvořující funkce lze hodnoty zmíněných charakteristik počítat mnohem snadněji než s využitím příslušných definičních vztahů. V dalších odstavcích se pak seznámíte s konvolucí celočíselných náhodných veličin a složeným rozdělením, jakož i s příslušnými vytvořujícími funkcemi



2.1. Vytvořující funkce

Nejprve zavedeme pojem celočíselná náhodná veličina, přesněji celočíselná nezáporná náhodná veličina.

Definice 2.1. Celočíselná náhodná veličina je diskrétní náhodná veličina, která může nabývat pouze hodnot z množiny celých nezáporných čísel, tj. hodnot $0, 1, \dots$.

Vhodným matematickým aparátem ke studiu takových veličin je jejich vytvořující funkce.

Definice 2.2. Necht' X je celočíselná náhodná veličina s rozdělením daným posloupností $\{p_j\}$, kde $p_j = P(X = j)$ pro $j = 0, 1, \dots$. Její vytvořující funkce $P(s)$ je vytvořující funkce posloupnosti $\{p_j\}$, tj. řada

$$P(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j,$$

kde s je pomocná reálná proměnná. Posloupnost $\{p_j\}$ je zřejmě omezená, proto $P(s)$ konverguje alespoň v intervalu $(-1, 1)$. Navíc $P(s)$ musí konvergovat také pro $s = 1$, protože platí

$$P(1) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1.$$

Celočíselná náh.
veličina (CNV)

Vytvořující funkce
CNV

Označme $q_k = P(X > k) = \sum_{j>k} p_j$ pro $k = 0, 1, \dots$. Vytvořující funkce $Q(s)$ posloupnosti $\{q_j\}$ má tvar

$$Q(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j.$$

Také tato vytvořující funkce (nekonečná řada) konverguje alespoň v intervalu $(-1, 1)$, neboť posloupnost $\{q_j\}$ je omezená. Nemusí však konvergovat v bodě $s = 1$. Souvislost mezi oběma vytvořujícími funkcemi je dána následující větou.



Věta 2.1. Pro každé $s \in (-1, 1)$ platí

$$Q(s) = \frac{1 - P(s)}{1 - s}.$$

Důkaz. Uvedený vztah se převede na tvar $(1-s)Q(s) = 1 - P(s)$ a porovnají se koeficienty u jednotlivých mocnin s na obou stranách této rovnosti. \square

Pomocí vytvořující funkce celočíselné náhodné veličiny lze velmi snadno spočítat hodnoty jejich teoretických charakteristik (střední hodnota, rozptyl, jiné momentové charakteristiky). V této části se omezíme pouze na výpočet střední hodnoty a rozptylu (variance).



Věta 2.2. Pro střední hodnotu celočíselné náhodné veličiny X platí

$$\mathbf{E}X = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j = \sum_{j=0}^{\infty} q_j = P'_-(1) = Q(1),$$

kde $P'_-(1)$ značí derivaci $P(s)$ zleva v bodě $s = 1$.

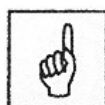
Důkaz. Z věty 2.1 a věty o přírůstku funkce dostaneme, že pro nějaké $\sigma \in (s, 1)$ platí

$$Q(s) = \frac{P(1) - P(s)}{1 - s} = P'(\sigma).$$

Nechť $s \rightarrow 1-$ (konvergence zleva), pak také $\sigma \rightarrow 1-$. Řady $P'(s)$ a $Q(s)$ jsou řady s nezápornými koeficienty, a proto musí platit

$$Q(1) = \lim_{\sigma \rightarrow 1-} P'(\sigma) = P'_-(1) \text{ neboli } \sum_{j=0}^{\infty} q_j = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j,$$

čímž je tvrzení dokázáno. \square



Věta 2.3. Nechť poloměr konvergence řady $P(s)$ je větší než 1. Pak platí

$$\text{var } X = P''(1) + P'(1) - P'^2(1) = 2Q'(1) + Q(1) - Q^2(1).$$

Důkaz. Vyjdeme ze vztahu $P(s) = 1 - (1-s)Q(s)$. Postupným derivováním tohoto vztahu dostaneme

$$P'(s) = Q(s) - (1-s)Q'(s), \quad \text{a tedy } P'(1) = Q(1),$$

$$P''(s) = 2Q'(s) - (1-s)Q''(s), \quad \text{a tedy } P''(1) = 2Q'(1).$$

Dále platí $P'(1) = \sum_{j=1}^{\infty} jp_j = \mathbf{E}X$, $P''(1) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)p_j = \mathbf{E}(X(X-1))$.

Odtud plyne

$$\begin{aligned} \text{var } X &= \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}(X(X-1)) + \mathbf{E}X - (\mathbf{E}X)^2 = \\ &= P''(1) + P'(1) - (P'(1))^2 = 2Q'(1) + Q(1) - Q^2(1), \end{aligned}$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

Příklady

2.1. Určete vytvořující funkci, střední hodnotu a rozptyl alternativního rozdělení, pro něžž platí

$$P(X = j) = \begin{cases} q & \text{pro } j = 0, \\ p & \text{pro } j = 1, \end{cases}$$

přičemž $p + q = 1$.

Řešení. Pro vytvořující funkci alternativního rozdělení zřejmě platí $P(s) = q + ps$. Odtud derivováním dostaneme

$$\mathbf{E}X = P'(1) = (q + ps)'_{s=1} = p; \quad P''(1) = (q + ps)''_{s=1} = 0,$$

takže

$$\text{var } X = P''(1) + P'(1) - P'^2(1) = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

2.2. Určete vytvořující funkci, střední hodnotu a rozptyl binomického rozdělení, pro něžž platí

$$P(X = j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \quad \text{pro } j = 0, 1, \dots, n.$$

Řešení. Vytvořující funkci binomického rozdělení lze (s využitím binomické věty) zapsat ve tvaru

$$P(s) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (ps)^j q^{n-j} = (q + ps)^n.$$

Odtud postupně dostaneme

$$\mathbf{E}X = P'(1) = np(q + ps)^{n-1} \Big|_{s=1} = np,$$

$$P''(1) = n(n-1)p^2(q + ps)^{n-2} \Big|_{s=1} = n(n-1)p^2,$$

$$\text{var } X = npq.$$





Kontrolní úkoly

2.1. Určete vytvořující funkci, střední hodnotu a rozptyl Poissonova rozdělení daného vztahem $P(X = j) = \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}$ pro $j = 0, 1, \dots$.

2.2. Určete vytvořující funkci, střední hodnotu a rozptyl geometrického rozdělení daného vztahem $P(X = j) = (1-p)^j p = q^j p$ pro $j = 0, 1, \dots$.

2.2. Konvoluce

Vyjdeme z definice konvoluce dvou číselných posloupností.

Definice 2.3. Necht' $\{p_j\}$ a $\{r_j\}$, $j \geq 0$, jsou dvě posloupnosti reálných čísel. Pak posloupnost $\{h_j\}$ definovaná vztahem

$$h_j = p_0 r_j + p_1 r_{j-1} + \dots + p_j r_0, \quad j \geq 0, \quad (2.1)$$

Konvoluce
posloupností

se nazývá **konvolucí posloupností** $\{p_j\}$ a $\{r_j\}$ a značí se $\{h_j\} = \{p_j\} * \{r_j\}$.



Konvoluce
rozdělení

Z uvedené definice vyplývá bezprostředně následující tvrzení. Necht' X a Y jsou nezávislé celočíselné náhodné veličiny s rozdělením $\{p_j\}$, resp. $\{r_j\}$. Pak součet $S = X + Y$ má rozdělení $\{h_j\}$ dané vztahem (2.1), a tedy **rozdělení součtu dvou nezávislých celočíselných náhodných veličin je konvolucí jejich rozdělení.**



Věta 2.4. Vytvořující funkce $H(s)$ součtu dvou nezávislých náhodných veličin X a Y s vytvořujícími funkcemi $P(s)$, resp. $R(s)$, je rovna součinu vytvořujících funkcí obou těchto veličin, tj. $H(s) = P(s)R(s)$.

Důkaz je triviální. Vytvořme součin $P(s)R(s)$. Koeficient při mocnině s^j je zřejmě dán vztahem (2.1). \square

Konvoluce $\{p_j\} * \{p_j\}$ se nazývá druhou konvoluční mocninou posloupnosti $\{p_j\}$ a značí se $\{p_j\}^{2*}$ a podobně lze zavést i vyšší konvoluční mocniny. Dříve uvedená tvrzení je možno zobecnit na součet libovolného počtu nezávislých celočíselných náhodných veličin. Speciálně platí:

Necht' X_1, X_2, \dots, X_n jsou nezávislé celočíselné náhodné veličiny se stejným rozdělením $\{p_j\}$, pak rozdělení jejich součtu $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ je n -tou konvoluční mocninou posloupnosti $\{p_j\}$ a vytvořující funkce $H(s)$ jejich součtu je rovna $P^n(s)$.



Příklad 2.3. Dokažte, že binomické rozdělení $\text{Bi}(n, p)$ je n -tou konvoluční mocninou rozdělení alternativního.

Řešení. Náhodná veličina X s binomickým rozdělením $\text{Bi}(n,p)$ udává počet úspěchů v sérii n nezávislých Bernoulliových pokusů s konstantní pravděpodobností úspěchu p v každém jednotlivém pokusu. Tuto veličinu lze vyjádřit jako součet $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ sdruženě nezávislých náhodných veličin s alternativním rozdělením ($0 =$ neúspěch s pravděpodobností q , $1 =$ úspěch s pravděpodobností p). Proto pro vytvořující funkci binomického rozdělení $\text{Bi}(n,p)$ platí

$$P(s) = P_{\text{alt}}^n(s) = (q + ps)^n,$$

což je v souladu s výsledkem příkladu 2.2. □

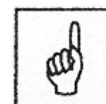
2.3. Složené rozdělení

Definice 2.4. Necht' X_1, X_2, \dots jsou nezávislé celočíselné náhodné veličiny. Necht' všechna X_j mají identické rozdělení $\{f_j\}$. Necht' celočíselná náhodná veličina N má rozdělení $\{g_n\}$. Pak rozdělení $\{h_j\}$ náhodné veličiny $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$, tedy rozdělení součtu náhodného počtu celočíselných náhodných veličin, se nazývá **složené rozdělení**.

Složené rozdělení

Věta 2.5. Pro složené rozdělení $\{h_j\}$ platí

$$h_j = \sum_{n=0}^{\infty} g_n f_j^{n*}$$



Důkaz. Podle věty o úplné pravděpodobnosti dostaneme

$$\begin{aligned} h_j &= P(S = j) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)P(S = j|N = n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = j) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n f_j^{n*}, \end{aligned}$$

neboť rozdělení součtu $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ je n -tou konvoluční mocninou rozdělení $\{f_j\}$. □

Příklad 2.4. Necht' g_n je pravděpodobnost, že samička určitého druhu hmyzu naklade právě n vajíček. Dále necht' p je pravděpodobnost, že se z vajíčka vylíhne živý jedinec. Určete pravděpodobnost toho, že samička „dá život“ právě j jedincům.



Řešení. Rozdělení $\{g_n\}$ počtu nakladených vajíček N není v zadání úlohy blíže specifikováno. Pro počet S vylíhnutých jedinců zřejmě platí $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$, kde každá z veličin X_i má alternativní rozdělení. Proto můžeme psát

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_N = j) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}.$$

Přitom jsme využili toho, že n -tou konvoluční mocninou alternativního rozdělení je rozdělení binomické.

V dalším výkladu odvodíme vztahy pro vytvořující funkci a základní charakteristiky složeného rozdělení.



Věta 2.6. Vytvořující funkce veličiny S , tj. součtu náhodného počtu N stejně rozdělených celočíselných náhodných veličin X_j má tvar

$$H(s) = G(F(s)),$$

kde $G(s)$ značí vytvořující funkci veličiny N a $F(s)$ vytvořující funkci každé z veličin X_j .

Důkaz. Pro hledanou vytvořující funkci zřejmě platí

$$H(s) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j s^j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} g_n f_j^{n*} s^j = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{n*} s^j,$$

kde f_j^{n*} reprezentuje j -tý člen posloupnosti $\{f_j\}^{n*}$. Vnitřní součet představuje vytvořující funkci posloupnosti $\{f_j\}^{n*}$ a ta má podle zobecněné věty 2.4 tvar $F^n(s)$. Odtud dostaneme

$$H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n F^n(s) = G(F(s)). \quad \square$$



Příklad 2.5. Nechť veličina N má Poissonovo rozdělení, tj. platí $g_n = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$ pro $n = 0, 1, \dots$ a každá z veličin X_j rozdělení alternativní.

Určete vytvořující funkci veličiny $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$.

Řešení. Pro vytvořující funkci veličiny N dostaneme

$$G(s) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda s)^j}{j!} = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^j}{j!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{-\lambda + \lambda s}.$$

Vytvořující funkce veličin X_j má (viz příklad 2.1) tvar $F(s) = q + ps$. Proto $H(s) = G(F(s)) = e^{-\lambda + \lambda(q + ps)} = e^{-\lambda p + \lambda ps}$, což je vytvořující funkce Poissonova rozdělení s parametrem λp .



Kontrolní úkol 2.3. Nechť veličina N má binomické rozdělení (viz příklad 2.2) a veličiny X_j rozdělení alternativní. Určete vytvořující funkci veličiny $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$.



Věta 2.7. Pro střední hodnotu veličiny S platí

$$\mathbf{E}S = \mathbf{E}(X_1 + X_2 + \dots + X_N) = \mathbf{E}N \mathbf{E}X_1.$$

Důkaz. S využitím vlastností vytvořující funkce dostaneme

$$\mathbf{E}S = \left[G(F(s)) \right]'_{s=1} = G'(F(1))F'(1) = G'(1)F'(1) = \mathbf{E}N \mathbf{E}X_1. \quad \square$$

Věta 2.8. Pro rozptyl (varianci) veličiny S platí

$$\text{var } S = \mathbf{E}N \text{ var } X_1 + (\mathbf{E}X_1)^2 \text{ var } N.$$

Důkaz. Nejprve určíme derivace vytvořující funkce $H(s)$ v bodě $s = 1$.
Zřejmě platí $H'(1) = G'(1)F'(1)$; $H''(1) = G''(1)[F'(1)]^2 + G'(1)F''(1)$.

Dále jedno- duchými úpravami dostaneme

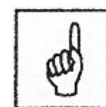
$$\begin{aligned} \text{var}S &= H''(1) + H'(1) - [H'(1)]^2 = \\ &= G''(1)[F'(1)]^2 + G'(1)F''(1) + G'(1)F'(1) - [G'(1)F'(1)]^2 = \\ &= G'(1)(F''(1) + F'(1) - [F'(1)]^2) + [F'(1)]^2(G''(1) + G'(1) - [G''(1)]^2) = \\ &= \mathbf{EN} \text{ var } X_1 + (\mathbf{EX}_1)^2 \text{ var } N, \end{aligned}$$

čímž je důkaz ukončen. □

Vlastností složeného rozdělení využijeme v kapitole 3 věnované větvcím se procesům.

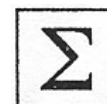
Pojmy k zapamatování:

- celočíselná náhodná veličina (CNV),
- vytvořující funkce CNV,
- konvoluce posloupností,
- konvoluce rozdělení,
- složené rozdělení.



Shrnutí

V úvodním odstavci zavádíme dva fundamentální pojmy: celočíselná (nezáporná) náhodná veličina a její vytvořující funkce. Zdůrazňujeme význam vytvořující funkce pro výpočet základních teoretických charakteristik celočíselných náhodných veličin: střední hodnoty a rozptylu (variance). V dalších odstavcích pak vysvětlujeme, jak (s využitím aparátu vytvořujících funkcí) počítat charakteristiky součtu konečného, resp. náhodného počtu celočíselných náhodných veličin.



3. VĚTVÍCÍ SE PROCESY

Obsah této kapitoly je koncipován tak, abyste po jejím prostudování:

- pochopili podstatu větvících se procesů,
- naučili se počítat základní teoretické charakteristiky větvících se procesů, jmenovitě střední hodnotu a rozptyl velikosti populace v jednotlivých generacích větvícího se procesu,
- uměli spočítat pravděpodobnost extinkce (zániku) větvícího se procesu,
- poznali možnosti aplikace teorie větvících se procesů v praxi.

V této kapitole využijete teoretických znalostí, které jste získali studiem kapitoly předcházející. Pochopíte, že teorie větvících se procesů je založena na poznacích o složeném rozdělení a jeho vlastnostech. V závěrečném odstavci se seznámíte s některými možnostmi aplikací teorie větvících se procesů.



3.1. Podstata větvícího se procesu

Definice 3.1. Větvící se proces (Galtonův-Watsonův proces větvení) je náhodný proces $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ takový, že náhodná veličina X_n udává počet částic v n -té generaci, $n = 0, 1, \dots$. V našich úvahách budou vystupovat částice (např. jedinci nějaké populace), jež mohou generovat částice téhož druhu. Budeme předpokládat, že:

- na počátku existuje k ($k > 0$) částic, které reprezentují tzv. nultou generaci,
- každá částice n -té generace ($n \geq 0$) je schopna s pravděpodobnostmi $p_j, j \geq 0$, vytvořit právě j nových částic (svých bezprostředních potomků), jež jsou součástí bezprostředně následující **generace** s pořadovým číslem $n + 1$,
- částice se chovají vzájemně nezávisle.

Je zřejmé, že každá částice nulté generace iniciuje samostatnou **větev** větvícího se procesu. Tento proces zanikne pouze v tom případě, když každá z jeho větví je ukončena, tj. neobsahuje žádnou částici.

Typickým příkladem větvícího se procesu je štěpení jader izotopu ${}_{92}^{235}\text{U}$ tepelnými neutrony. Pro jednoduchost předpokládejme, že na počátku existuje jediný tepelný neutron. Při jeho „srážce“ s uvažovaným jádrem se uvolňuje energie a vznikají (kromě štěpných produktů – fragmentů jádra) tepelné neutrony první generace, jejichž počet je dán náhodnou veličinou s rozdělením $\{p_j\}$. Každý z těchto tepelných neutronů první generace (nezávisle na ostatních) může generovat tepelné neutrony druhé generace a štěpná reakce (větvící se proces) se tak může dále rozvíjet.

Větvící se proces

Generace větvícího se procesu

Větev procesu

3.2. Vytvořující funkce větvičího se procesu

Nechť X_n je celočíselná náhodná veličina, jež označuje počet částic n -té generace a $P_n(s)$ její vytvořující funkce. Předpokládejme pro jednoduchost, že na počátku existuje (s pravděpodobností rovnou 1) jediná částice, tj. $X_0 = 1$. Příslušná vytvořující funkce má tedy tvar $P_0(s) = s$.

Počet částic X_1 první generace má podle předpokladu rozdělení $\{p_j\}$, tj. vytvořující funkci $P(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j$, takže platí $P_1(s) = P(s)$.

Počet bezprostředních potomků každé z X_1 částic první generace je celočíselná náhodná veličina s rozdělením také $\{p_j\}$. Podle věty 2.6 o složeném rozdělení dostaneme pro vytvořující funkci veličiny X_2 vztah $P_2(s) = P(P(s))$.

Částice třetí generace jsou „potomky druhého řádu“ částic první generace. Veličina X_3 je tedy součtem X_1 nezávislých náhodných veličin, z nichž každá má stejné rozdělení jako veličina X_2 . Z toho plyne pro vytvořující funkci veličiny X_3 vztah $P_3(s) = P(P_2(s))$.

Na druhé straně jsou částice třetí generace bezprostředními potomky X_2 částic druhé generace, takže X_3 je součtem X_2 nezávislých náhodných veličin majících stejné rozdělení jako X_1 . Odtud plyne $P_3(s) = P_2(P(s))$.

Na otázku, jak určit vytvořující funkci pro počet částic libovolné generace, odpovídá následující věta.



Věta 3.1. Pro vytvořující funkce $P_n(s)$, $n \geq 1$, platí rekurentní vztah $P_{n+1}(s) = P(P_n(s)) = P_n(P(s))$.

Důkaz. Stačí provést stejnou úvahu jako v předcházející části tohoto odstavce pro $n = 3$. □



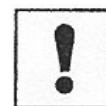
Příklad 3.1. Nechť počet bezprostředních potomků jedné částice má Poissonovo rozdělení, jehož vytvořující funkce je spočtena v příkladu 2.5. Určete vytvořující funkce $P_n(s)$ pro $n = 1, 2, 3$.

Řešení. Vytvořující funkce $P_1(s)$ je přímo vytvořující funkcí Poissonova rozdělení, tj. $P_1(s) = e^{-\lambda + \lambda s}$. Dále dostaneme

$$P_2(s) = P(P(s)) = e^{-\lambda + \lambda e^{-\lambda + \lambda s}},$$

$$P_3(s) = P_2(P(s)) = e^{-\lambda + \lambda e^{-\lambda + \lambda e^{-\lambda + \lambda s}}}.$$

Kontrolní úkol 3.1. Necht' počet bezprostředních potomků jedné částice má binomické rozdělení. Určete vytvořující funkce $P_n(s)$ pro $n = 1, 2, 3$.



3.3. Charakteristiky větvícího se procesu

Nejprve zavedeme střední hodnotu μ počtu bezprostředních potomků jedné částice vztahem

$$\mu = \mathbf{E}X_1 = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j.$$

Je zřejmé, že tato veličina je současně střední hodnotou počtu částic první generace.

Věta 3.2. Střední hodnota počtu částic n -té generace ($n \geq 0$) je dána vztahem

$$\mathbf{E}X_n = \mu^n.$$

Důkaz provedeme matematickou indukcí. Uvedený vztah zřejmě platí pro $n = 0$. V nulté generaci existuje pouze jediná částice, takže skutečně platí $\mathbf{E}X_0 = \mu^0 = 1$. Předpokládejme, že vztah platí pro nějaké přirozené číslo n , a dokážme jeho platnost pro $n + 1$.

Podle věty 2.7 o střední hodnotě složeného rozdělení (konkrétně střední hodnotě součtu X_n náhodných veličin s rozdělením $\{p_j\}$) dostaneme

$$\mathbf{E}X_{n+1} = \mathbf{E}X_n \mathbf{E}X_1 = \mu^n \mu = \mu^{n+1}.$$

Tím je platnost vztahu dokázána pro všechna přirozená n . □

V závislosti na hodnotě parametru μ se střední hodnota velikosti populace (počtu částic) s rostoucím n nemění (pro $\mu = 1$), nebo exponenciálně vzrůstá (pro $\mu > 1$), nebo exponenciálně klesá (pro $\mu < 1$).

Poznámka. Tvrzení věty 3.2 je možno rozšířit i na případ, kdy nultou generaci tvoří $k > 1$ vzájemně nezávislých částic. Pak zřejmě platí $\mathbf{E}X_n = k\mu^n$.

Dále označme symbolem σ^2 rozptyl (varianci) počtu bezprostředních potomků jedné částice, tj. $\text{var } X_1 = \sigma^2$.

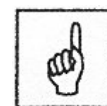
Věta 3.3. Rozptyl počtu částic n -té generace ($n \geq 0$) je dán vztahem

$$\text{var } X_n = \sigma^2 \mu^{n-1} \frac{1 - \mu^n}{1 - \mu}.$$

Důkaz provedeme také matematickou indukcí. Pro $n = 0$ vztah zřejmě platí, tedy $\text{var } X_0 = 0$. Vyjdeme z předpokladu, že vztah platí pro nějaké přirozené n a dokážeme jeho platnost pro $n + 1$.

K tomuto důkazu použijeme větu 2.8 o rozptylu složeného rozdělení (konkrétně rozptylu součtu X_n náhodných veličin s rozdělením $\{p_j\}$).

Podle této věty dostaneme



$$\begin{aligned} \text{var } X_{n+1} &= \mathbf{E}X_n \text{ var } X_1 + (\mathbf{E}X_1)^2 \text{ var } X_n = \mu^n \sigma^2 + \sigma^2 \mu^{n+1} \frac{1-\mu^n}{1-\mu} = \\ &= \sigma^2 \mu^n \left[1 + \frac{\mu(1-\mu^n)}{1-\mu} \right] = \sigma^2 \mu^n \left[\frac{1-\mu + \mu - \mu^{n+1}}{1-\mu} \right] = \sigma^2 \mu^n \left[\frac{1-\mu^{n+1}}{1-\mu} \right], \end{aligned}$$

čímž je důkaz ukončen. \square

Poznámka. Ve speciálním případě $\mu = 1$ platí pro rozptyl počtu částic n -té generace jednoduchý vztah $\text{var } X_n = n\sigma^2$. Důkaz se provede analogicky.

Pro $\mu = 1$ rozptyl velikosti populace (počtu částic) roste lineárně s hodnotou n . Je-li $\mu > 1$ ($\mu < 1$), pak rozptyl velikosti populace s rostoucím n exponenciálně vzrůstá (klesá).

4.3. Pravděpodobnost extinkce větvičího se procesu

Extinkce větvičího se procesu

Uvažujme nyní pravděpodobnost x_n tzv. **extinkce** větvičího se procesu, tj. toho, že se větvičí proces $\{X_n, n \in \mathbf{N}\}$, vycházející z jediné částice nulté generace, zastaví dříve, než dosáhne n -té generace. V triviálním případě $p_0 = 0$ platí zřejmě $x_n = 0$ pro všechna $n \geq 1$ a extinkce větvičího se procesu není možná. Nechť tedy $0 < p_0 \leq 1$. V takovém případě má posloupnost $\{x_n\}$ následující vlastnosti (viz [6]).

1. Pravděpodobnosti x_n rostou s hodnotou n , tj.

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < 1.$$

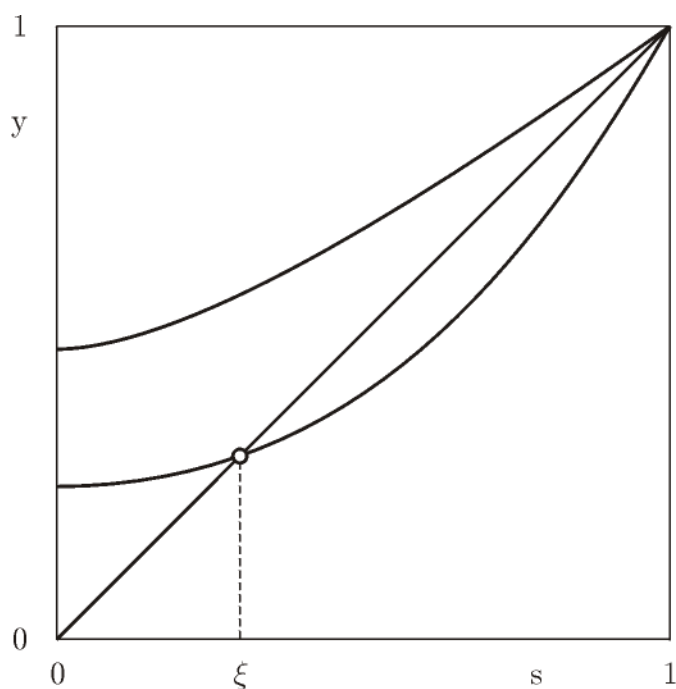
2. Nultá generace obsahuje právě jedinou částici, proto $x_0 = 0$. Pravděpodobnost, že tato částice nevytvoří žádného bezprostředního potomka, je p_0 , takže $x_1 = p_0$.
3. Posloupnost $\{x_n\}$ je rostoucí a omezená, proto musí mít vlastní limitu. Jelikož zřejmě platí

$$x_n = P_n(0) = P(P_{n-1}(0)) = P(x_{n-1}),$$

musí tato limita ξ vyhovovat funkcionální rovnici

$$\xi = P(\xi). \quad (3.1)$$

Vytvořující funkce $P(s) = P_1(s)$ i její derivace $P'_1(s)$ obsahují pouze kladné členy a musí tedy růst v intervalu $0 < s \leq 1$. Křivka $y = P_1(s)$ je konvexní a protíná přímku $y = s$ nejvýše ve dvou bodech, z nichž jedním je bod $[1,1]$ (viz obr. 3.1).



Obrázek 3.1: Ilustrace k řešení rovnice (3.1)

Lze poměrně snadno dokázat (viz [5]), že nutná a postačující podmínka pro existenci kořenu $\xi < 1$ rovnice (3.1) má tvar $\mu = P_1'(1) > 1$, kde μ značí střední hodnotu počtu bezprostředních potomků jednoho objektu. V tomto případě křivka $y = P(s)$ vychází z bodu $[0, p_0]$ protíná přímku $y = s$ v bodě $[\xi, P(\xi)]$ a leží pod ní, až dosáhne bodu $[1,1]$. Je-li naopak $\mu \leq 1$, pak křivka $y = P(s)$ leží v celém intervalu $(0,1)$ nad přímkou $y = s$, a proto neexistuje vůbec žádný kořen $\xi < 1$ rovnice (3.1).

Je-li tedy $\mu > 1$, pak kořen $\xi < 1$ udává jednoznačně pravděpodobnost extinkce větvičího se procesu po nějakém konečném počtu generací. Platí-li však $\mu \leq 1$, potom má rovnice (3.1) jediný kořen $\xi = 1$ a větvičí se proces $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ zanikne s jistotou.

Uvedený výsledek se snadno rozšíří na případ, kdy nultou generaci tvoří jediná částice, ale $k > 1$ vzájemně nezávislých objektů. V takovém případě je pravděpodobnost extinkce všech k větví procesu rovna jednoduše ξ^k . Výraz $1 - \xi^k$ pak udává pravděpodobnost, že se aspoň jedna z větví bude úspěšně rozvíjet.

3.5. Aplikace větvičího se procesu

Teorie větvičích se procesů má celou řadu užitečných aplikací. V následujícím přehledu uvádíme některé z nich:

- průběh štěpné reakce v jaderném reaktoru,
- rozvoj populace s tzv. nepřekrývajícími se generacemi, tj. takové populace (např. populace některých druhů hmyzu), u níž rodičovská

generace nepřechází (nepřežívá) do generace bezprostředních potomků,

- šíření malých epidemií z jednoho nebo více nezávislých zdrojů nákazy v případě, že se nákaza šíří přímým kontaktem mezi infekčním jedincem a jedinci citlivými vůči nákaze,
- šíření malých lesních kalamit (např. kůrovce) z jednoho nebo více nezávislých zdrojů,
- průběh tzv. pyramidálních her.



Pojmy k zapamatování:

- větvení se procesu,
- větev větvení se procesu,
- generace větvení se procesu,
- extinkce větvení se procesu.



Shrnutí:

V této kapitole je zaveden pojem větvení se procesu a vysvětlena jeho podstata. Dále jsou odvozeny vztahy pro základní charakteristiky větvení se procesu: střední hodnotu a rozptyl (varianci) počtu částic v n -té generaci, jakož i pravděpodobnost extinkce větvení se procesu před dosažením n -té generace.

Korespondenční úkol 1

Pokuste se definovat nějaký větvičí se proces a provést jeho podrobnější analýzu. Můžete přitom vycházet z námětů uvedených v odstavci 3.5.



Vaše práce by měla mít následující strukturu:

1. definice větvičího se procesu (s důrazem na předpoklady a rozdělení počtu bezprostředních potomků jedné částice),
2. podrobnější popis průběhu zvoleného větvičího se procesu,
3. stanovení vytvořující funkce, střední hodnoty a rozptylu (variance) pro jednotlivé generace procesu,
4. výpočet pravděpodobnosti extinkce procesu před dosažením n -té generace,
5. interpretace získaných teoretických výsledků.

4. MARKOVOVY ŘETĚZCE S DISKRÉTNÍM ČASEM

Po prostudování této kapitoly:

- pochopíte základní pojmy teorie, zejména Markovův řetězec s diskretním časem, pravděpodobnost přechodu, dosažitelnost daného stavu, uzavřená množina stavů, stacionární rozdělení,
- naučíte se konstruovat matici pravděpodobností přechodu,
- naučíte se klasifikovat stavy Markovova řetězce,
- naučíte se počítat pravděpodobnosti stavů Markovova řetězce v daném čase, stacionární pravděpodobnosti i pravděpodobnosti absorpce v nějaké uzavřené množině trvalých stavů.

Tato kapitola je nejrozsáhlejší částí distanční opory. Obsahuje definice relativně velkého počtu nových pojmů a také řadu významných vět, z nichž některé uvádíme bez důkazu. Věnujte maximální pozornost základním pojmům teorie Markovových řetězců s diskretním časem a diskretními stavy, abyste dokázali úspěšně řešit konkrétní úlohy a také korespondenční úkol, který následuje bezprostředně po prostudování této kapitoly.



4.1. Markovův řetězec a jeho reprezentace

Uvažujme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) a na něm definovanou posloupnost celočíselných náhodných veličin $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$. Nechť $S = \{s_1, s_2, \dots\}$ je **množina stavů** náhodného procesu $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ a její prvky **stavy** tohoto procesu. Tato množina může být konečná nebo spočetně nekonečná. Říkáme, že systém je v čase $t = n$ ve stavu s_i , právě když $X_n = i$.

Množina stavů

Definice 4.1. Posloupnost celočíselných náhodných veličin $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ se nazývá **Markovův řetězec** (dále **MŘ**) s **diskretním časem**, jestliže

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad (4.1)$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro všechna přirozená čísla $i, j, i_{n-1}, \dots, i_0$ taková, že platí $P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) > 0$.



Vztah (4.1) vyjadřuje tzv. **markovskou vlastnost**, což znamená, že pravděpodobnost určité hodnoty procesu v budoucnosti (v čase $n+1$) závisí jen na jeho hodnotě v přítomném čase n a nikoli na jeho hodnotách v minulosti (v časech $n-1, n-2, \dots, 0$).

Markovská vlastnost

Pravděpodobnosti
přechodu

Homogenní MŘ
Nehomogenní MŘ

Matice
pravděpodobností
přechodu MŘ

Stochastická
matice

Počáteční
rozdělení MŘ



Podmíněné pravděpodobnosti $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}(n, n+1)$ se nazývají **pravděpodobnosti přechodu** ze stavu s_i (v čase n) do stavu s_j (v čase $n+1$) nebo také **pravděpodobnosti přechodu prvního řádu**. Pokud tyto pravděpodobnosti nezávisí na n , značí se jednoduše p_{ij} a příslušný **Markovův řetězec** je **homogenní**. V opačném případě jde o **nehomogenní Markovův řetězec**. Dále se budeme zabývat pouze homogenními Markovovými řetězci.

Čtvercová matice $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}$, tvořená pravděpodobnostmi přechodu p_{ij} mezi jednotlivými stavy, se nazývá **matice pravděpodobností přechodu** homogenního MŘ. Tato matice má následující vlastnosti:

- pro všechna i, j platí $p_{ij} \geq 0$,
- pro všechna i platí $\sum_j p_{ij} = 1$.

Matice s těmito vlastnostmi se nazývá **stochastická matice**.

Pravděpodobnostní rozdělení $\mathbf{p}^{(0)} = \{p_i^{(0)}\}$, kde $p_i^{(0)} = P(X_0 = i)$ se nazývá **počáteční rozdělení** homogenního Markovova řetězce.

Markovův řetězec s diskrétními stavy je tedy plně určen (definován) zadáním:

- množiny stavů S ,
- vektoru počátečního rozdělení $\mathbf{p}^{(0)} = \{p_i^{(0)}\}$,
- matice pravděpodobností přechodu $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}$.

Příklady

4.1. Náhodná procházka s absorbujícími stěnami. Uvažujme částici, která se pohybuje po celočíselných bodech na přímce, a to v každém kroku o jednotku vpravo s pravděpodobností p nebo o jednotku vlevo s pravděpodobností $q = 1 - p$, přitom nezávisle na předcházejících krocích. Jestliže částice dosáhne bodu $x = 0$ nebo $x = a$ ($a > 0$), pak v těchto bodech setrvá (je v nich absorbována). Určete matici pravděpodobností přechodu \mathbf{P} .

Řešení. Množina možných stavů systému je zřejmě $S = \{s_1, s_2, \dots, s_a\}$, přičemž s_i značí, že částice se nachází v bodě $x = i$. Pro pravděpodobnosti přechodů dostaneme jednoduchou úvahou

$$p_{00} = p_{aa} = 1,$$

$$p_{j,j-1} = q, p_{j,j+1} = p \text{ pro } j = 1, 2, \dots, a-1.$$

Označíme-li řádky i sloupce matice \mathbf{P} pomocí symbolů jednotlivých stavů systému (tedy s_0, s_1, \dots, s_a), bude mít matice pravděpodobností přechodů tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tento příklad lze snadno interpretovat. Dva hráči spolu hrají posloupnost partií, přičemž v každé partii hráč vyhraje jednu korunu s pravděpodobností p nebo prohraje jednu korunu s pravděpodobností q . Hraje se tak dlouho, dokud jeden z obou hráčů neprohraje všechny své peníze.

4.2. Série úspěšných pokusů. Uvažujme posloupnost bernoulliovských pokusů, tj. posloupnost nezávislých pokusů se dvěma možnými výsledky (úspěch, neúspěch) takových, že pravděpodobnost úspěchu p zůstává konstantní. Předpokládejme, že systém je v čase $t = n$ ve stavu s_j , jestliže v n -tém pokuse dosáhla série po sobě jdoucích úspěchů délky j . Určete matici pravděpodobností přechodu \mathbf{P} .

Řešení. Množina stavů MŘ je zřejmě spočetně nekonečná, tedy $S = \{s_0, s_1, \dots\}$. Pro pravděpodobnosti přechodů platí:

- $p_{j0} = q, p_{j,j+1} = p$ pro všechna přirozená čísla j ,
- $p_{jk} = 0$ ve všech ostatních případech.

Odtud pro matici pravděpodobností přechodu \mathbf{P} dostaneme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & 0 & p & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

4.3. Posloupnost hodů hrací kostkou. Předpokládejme, že systém je ve stavu s_j jestliže j představuje nejvyšší číslo, které padlo v předcházejících hodech. Sestavte matici pravděpodobností přechodu \mathbf{P} .

Řešení. V tomto případě je $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$. Pro pravděpodobnosti přechodů platí:

- $p_{i,i-k} = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, 6$ a $0 < k \leq i-1$,
- $p_{ii} = \frac{i}{6}$ pro $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$,
- $p_{i,i+k} = \frac{1}{6}$ pro $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ a $0 < k \leq 6-i$.

Hledaná matice \mathbf{P} má tedy tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$$

Kontrolní úkoly



4.1. Uvažujte posloupnost nezávislých pokusů s množinou n možných výsledků $\{1, 2, \dots, n\}$, které nastávají s konstantními pravděpodobnostmi p_1, p_2, \dots, p_n . Předpokládejte přitom, že systém je ve stavu s_j , jestliže právě provedený pokus skončí výsledkem j . Určete matici pravděpodobností přechodu \mathbf{P} .

4.2. Náhodná procházka s odražejícími stěnami. Představte si částici, která se chová jako v příkladu 4.1 s tím rozdílem, že namísto absorbujících stěn v bodech 0 a a existují odražející stěny v bodech $\frac{1}{2}$ a $a - \frac{1}{2}$. To znamená, že částice přecházející z bodu 1 do bodu 0 je vrácena zpět do bodu 1 , a také částice přecházející z bodu $a - 1$ do bodu a se vrací do bodu $a - 1$. Určete matici pravděpodobností přechodu \mathbf{P} .

4.3. Je dána neomezená zásoba kuliček. V každém kroku zařadíme jednu kuličku náhodně do jedné z N přihrádek. Systém je ve stavu s_j , $j = 1, 2, \dots, a$, jestliže je obsazeno právě j přihrádek (jednou nebo více kuličkami). Určete matici pravděpodobností přechodu \mathbf{P} .

4.4. Ehrenfestův pokus. Nechť N vzájemně rozlišitelných molekul plynu je rozděleno do dvou nádob A a B. V každém kroku se náhodně vybere jedna molekula a přemístí se z nádoby, ve které se právě nachází, do nádoby druhé. Stav systému je dán počtem molekul v nádobě A. Určete matici pravděpodobností přechodu \mathbf{P} .

4.2. Pravděpodobnosti přechodů vyšších řádů

Nechť je dán homogenní MŘ s diskrétním časem $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$. Uvažujme nyní pravděpodobnosti přechodů ze stavu s_i v nějakém čase m do stavu s_j v čase $m+n$. Takové pravděpodobnosti se nazývají **pravděpodobnosti přechodů po n krocích** nebo **pravděpodobnosti přechodů n -tého řádu**; budeme je označovat $p_{ij}^{(n)}$.

Podle věty o úplné pravděpodobnosti platí

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_v p_{iv} p_{vj}, \dots, p_{ij}^{(n+1)} = \sum_v p_{iv} p_{vj}^{(n)}, \dots$$

neboli maticově

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}, \dots, \mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^n, \dots$$

Pravděpodobnost
přechodu n -tého řádu

kde $\mathbf{P}^n = \{p_{ij}^{(n)}\}$. Je zřejmé, že pravděpodobnosti přechodů n -tého řádu jsou prvky n -té mocniny matice pravděpodobností přechodu \mathbf{P} . Pro úplnost dodáváme $\mathbf{P}^0 = \{\delta_{ij}\}$.

Je-li dána v konkrétním případě matice \mathbf{P} , máme k dispozici tři postupy, jak určit pravděpodobnosti přechodů vyšších řádů (matici \mathbf{P}^n).

- 1) Postupné umocňování matice \mathbf{P} . Tento postup je vhodný zejména tehdy, jsou-li prvky matice \mathbf{P} dány numericky.
- 2) Určení prvků matice \mathbf{P} přímo z definice MŘ. Postup si ukážeme na následujícím příkladě.

Příklad 4.4. Vyjděte ze zadání příkladu 4.2, jenž se týkal série úspěšných pokusů, a určete přímo prvky matice \mathbf{P}^n .



Řešení. Z počátečního stavu j můžeme po n krocích přejít do:

- stavu $j+n$, jestliže všech n pokusů skončí úspěchem,
- stavu 0, skončí-li poslední n -tý pokus neúspěchem,
- stavu 1, skončí-li předposlední pokus neúspěchem a poslední úspěchem,
- stavu 2, budou-li výsledky posledních tří pokusů neúspěch, úspěch a úspěch atd.

Matice pravděpodobností přechodů n -tého řádu bude mít tedy tvar

$$\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} q & qp & qp^2 & \dots & qp^{n-1} & p^n & 0 & 0 & \dots \\ q & qp & qp^2 & \dots & qp^{n-1} & 0 & p^n & 0 & \dots \\ q & qp & qp^2 & \dots & qp^{n-1} & 0 & 0 & p^n & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

- 3) Použití **Perronova vzorce** známého z teorie matic (viz např. [7]). Tento postup je možný pouze tehdy, je-li matice \mathbf{P} konečného řádu. Obecný tvar Perronova vzorce je dosti komplikovaný, proto se omezíme jen na případ, kdy všechna charakteristická čísla matice \mathbf{P} jsou jednoduchá. Pak má Perronův vzorec tvar

Perronův vzorec

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^r \frac{\lambda_k^n P_{ij}(\lambda_k)}{\psi_k(\lambda_k)},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ jsou charakteristická čísla matice \mathbf{P} ,

$P(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{P})$ je charakteristický polynom matice \mathbf{P} ,

$\psi_k(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)}$ a $P_{ij}(\lambda)$ jsou prvky matice $\text{adj}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{P})$.

Kontrolní úkol 4.5. Nechť je dána matice pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}. \text{ Spočtěte prvky matice } \mathbf{P}^n.$$



4.3. Pravděpodobnosti stavu systému v daném čase

Označme $\mathbf{p}^{(n)} = \{p_i^{(n)}\}$ vektor nepodmíněných pravděpodobností jednotlivých stavů systému v čase $t = n$. Z věty o úplné pravděpodobnosti plyne

$$p_j^{(n)} = \sum_i p_i^{(0)} p_{ij}^{(n)} \text{ a také obecně } p_j^{(m+n)} = \sum_i p_i^{(m)} p_{ij}^{(n)}.$$

Jsou-li $\mathbf{p}^{(0)}$ a $\mathbf{p}^{(n)}$ řádkové vektory, můžeme psát

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{P}^n, \text{ obecně } \mathbf{p}^{(n+m)} = \mathbf{p}^{(m)} \mathbf{P}^n.$$

Podobně lze ukázat, že také platí

$$\mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{p}^{(n)} \mathbf{P}.$$



Příklad 4.5. Uvažujte náhodnou procházku s absorbujícími stěnami (viz příklad 4.1) za předpokladu, že $a = 3$ a částice je na počátku (v čase $t = 0$) ve stavu 2. Určete pravděpodobnosti jednotlivých stavů systému v časech $t = 1$ a $t = 2$.

Řešení. Množina možných stavů systému je $S = \{0, 1, 2, 3\}$ a pro vektor počátečního rozdělení pravděpodobností zřejmě platí $\mathbf{p}^{(0)} = \{0, 0, 1, 0\}$. Proto

$$\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{P} = \{0, q, 0, p\},$$

$$\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(1)} \mathbf{P} = \{q^2, 0, pq, p\}.$$



Kontrolní úkol 4.6. Uvažujte posloupnost hodů hrací kostkou (viz příklad 4.3) za předpokladu, že vektor počátečního rozdělení má tvar $\mathbf{p}^{(0)} = \{0, 0, 1, 0, 0, 0\}$. Určete pravděpodobnosti jednotlivých stavů systému v časech $t = 1$ a $t = 2$.

Pro další výklad bude užitečná následující věta.



Věta 4.1. Jestliže existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ nezávislá na výchozím stavu i , pak existuje také $\lim_{n \rightarrow \infty} p_j^{(n)}$ a obě limity se rovnají.

Důkaz. Necht' pro všechna i platí $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = k$. Pak můžeme psát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_j^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i p_i^{(0)} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} \sum_i p_i^{(0)} = k \sum_i p_i^{(0)} = k,$$

čímž je věta dokázána. □

4.4. Rekurentní jevy



Teorie Markovových řetězců s diskretním časem souvisí velmi těsně s teorií tzv. rekurentních jevů. Pojem rekurentního jevu je sice srozumitelný, ale jeho formální definice je velmi těžkopádná, proto ji nebudeme v tomto učebním textu uvádět. Podrobné poučení o rekurentních jevech můžete nalézt např. ve skriptech [3].

Přímo z definice rekurentních jevů vyplývají následující tvrzení.

Věta 4.2. Je-li systém na počátku (v čase $t = 0$) ve stavu s_j , pak každý průchod systémem stavem s_j je rekurentní jev.

Důkaz je uveden např. ve skriptech [3,5]. □

Uvažujme Markovův řetězec s diskretním časem, který je na počátku (v čase $t = 0$) v nějakém konkrétním stavu s_j . Doba potřebná k tomu, aby se systém poprvé vrátil do stavu s_j , se nazývá **doba (čas) návratu** do stavu s_j . Tato náhodná veličina má pravděpodobnostní rozdělení $\{f_j^{(n)}\}$. To znamená, že $f_j^{(n)}$ udává pravděpodobnost toho, že systém bude v čase $t = n$ poprvé ve stavu s_j , byl-li na počátku (v čase $t = 0$) také ve stavu s_j . Pravděpodobnosti doby návratu $f_j^{(n)}$ souvisejí s pravděpodobnostmi přechodu po n krocích $p_{jj}^{(n)}$ takto

$$p_{jj}^{(n)} = f_j^{(0)} p_{jj}^{(n)} + f_j^{(1)} p_{jj}^{(n-1)} + \dots + f_j^{(n)} p_{jj}^{(0)},$$

přičemž $f_j^{(0)} = 0$ a $p_{jj}^{(0)} = 1$.

Věta 4.3. Je-li systém na počátku (v čase $t = 0$) ve stavu $s_i \neq s_j$ pak každý průchod systémem stavem s_j je rekurentní jev se zpožděním.

Důkaz je uveden např. ve skriptech [3,5]. □

Uvažujme nyní Markovův řetězec s diskretním časem, který je na počátku (v čase $t = 0$) v nějakém konkrétním stavu $s_i \neq s_j$. Doba potřebná k tomu, aby se systém poprvé dostal do stavu s_j , se nazývá **doba čekání na první průchod stavem s_j** . Tato náhodná veličina má rozdělení $\{f_{ij}^{(n)}\}$, takže $f_{ij}^{(n)}$ udává pravděpodobnost toho, že systém bude v čase $t = n$ poprvé ve stavu s_j , byl-li na počátku (v čase $t = 0$) ve stavu $s_i \neq s_j$. Pravděpodobnosti $f_{ij}^{(n)}$ souvisejí s pravděpodobnostmi přechodu po n krocích $p_{ij}^{(n)}$ prostřednictvím vztahů

$$p_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(n)} + \left(f_j^{(0)} p_{ij}^{(n)} + f_j^{(1)} p_{ij}^{(n-1)} + \dots + f_j^{(n)} p_{ij}^{(0)} \right),$$

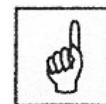
kde $f_{ij}^{(0)} = 0$ a $p_{ij}^{(0)} = 0$.

4.5. Klasifikace stavů Markovova řetězce

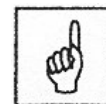
Definice 4.2. Stav s_j Markovova řetězce se nazývá **trvalý**, jestliže

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)} = 1, \text{ a } \textbf{přechodný}, \text{ jestliže } \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)} < 1.$$

Do stavu trvalého se Markovův řetězec určitě někdy (dříve nebo později) dostane. Přesněji řečeno, do trvalého stavu se Markovův řetězec vrátí s pravděpodobností 1 po konečně mnoha krocích. Naproti tomu do



Doba návratu do daného stavu



Doba čekání na první průchod daným stavem

Stav trvalý
Stav přechodný

přechodného stavu se Markovův řetězec s pravděpodobností $1 - \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)}$ nikdy nevrátí.

Označme μ_j střední hodnotu doby návratu do stavu s_j . Pak můžeme vyslovit tuto definici.

Stav nenulový
Stav nulový

Definice 4.3. Trvalý stav s_j Markovova řetězce se nazývá **nenulový**, jestliže $\mu_j < +\infty$, a **nulový**, jestliže $\mu_j = +\infty$.

Trvalý stav je tedy nenulový, když střední doba návratu do tohoto stavu nabývá konečné hodnoty, v opačném případě je nulový.

U trvalých nenulových stavů rozlišujeme ještě stavy periodické a neperiodické.

Stav periodický
Stav neperiodický

Definice 4.4. Necht' λ je největší společný dělitel čísel $n \geq 1$, pro které platí $p_{ij}^{(n)} > 0$. Je-li $\lambda > 1$, říkáme, že stav s_j je **periodický s periodou λ** . Je-li však $\lambda = 1$, pak říkáme, že stav s_j je **neperiodický (aperiodický)**.

Markovův řetězec je neperiodický, jsou-li všechny jeho stavy neperiodické. Jinak se nazývá periodický.

Pravděpodobnosti $f_j^{(n)}$ se v praxi určují mnohem obtížněji než pravděpodobnosti $p_{ij}^{(n)}$, proto je užitečná následující věta.



Věta 4.4.

(1) Stav s_j je přechodný, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < +\infty$. V tomto případě

platí $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < +\infty$ pro každé i .

(2) Stav s_j je trvalý nulový, právě když platí $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = +\infty$, ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

(3) Je-li stav s_j trvalý nenulový a neperiodický, pak platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} \text{ a } \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}.$$

(4) Je-li stav s_j trvalý nenulový a periodický s periodou λ , pak platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n\lambda)} = \frac{\lambda}{\mu_j} \text{ a pro } i \neq j \text{ (} 0 \leq \nu < \lambda - 1 \text{)} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n\lambda + \nu)} = \frac{\lambda}{\mu_j} \sum_{k=0}^{\nu} f_{ij}^{(k\lambda + \nu)}.$$

Důkaz tohoto tvrzení je uveden ve skriptech [3]. □



Kritérium neperiodičnosti. Je-li $p_{ij} > 0$, pak stav s_j je neperiodický. Tato podmínka je postačující, nikoli nutná.

Příklad 4.6. Uvažujme zjednodušený model počasí se dvěma stavy: $s_1 = \{\text{deštivo}\}$ a $s_2 = \{\text{slunečno}\}$. To znamená, že předpověď na zítřejší den je určena pouze počasím dnešního dne. Necht' matice pravděpodobností přechodu má tvar

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Jak je to s periodicitou stavů?

Řešení. Diagonální prvky přechodové matice jsou kladné, oba stavy jsou tedy neperiodické a celý Markovův řetězec je také neperiodický.

Kontrolní úkol 4.7. Uvažujte náhodnou procházku v obci se čtyřmi ulicemi, které tvoří strany čtverce. Chodec nacházející se v libovolném z vrcholů čtverce může jít s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ „vpravo“ nebo „vlevo“. Matice pravděpodobností přechodu má zřejmě tvar

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Posuďte periodicitu stavů tohoto Markovova řetězce.

Definice 4.5. Stavy trvalé nenulové a neperiodické se nazývají **ergodické**.

Pro klasifikaci stavů Markovova řetězce je užitečná následující věta.

Věta 4.5. V Markovově řetězci s konečně mnoha stavy neexistují stavy trvalé nulové a není možné, aby všechny stavy byly přechodné.

Důkaz je uveden ve skriptech [3]. □

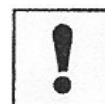
4.6. Nerozložitelné a rozložitelné Markovovy řetězce

Nejprve uvedeme několik užitečných definic.

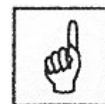
Definice 4.6. Stav s_j je **dosažitelný** ze stavu s_i , jestliže existuje přirozené číslo $n \geq 0$ takové, že $p_{ij}^{(n)} > 0$.

Z uvedené definice vyplývá, že každý stav je dosažitelný ze sebe sama, protože platí $p_{ii}^{(0)} = 1$.

Příklad 4.7. Náhodná procházka s pohlcujícími stěnami: ze stavů s_1, s_2, \dots, s_{a-1} jsou dosažitelné všechny stavy, ze stavu s_0 jen stav s_0 a ze stavu s_a pouze stav s_a .



Stav ergodický



Dosažitelnost stavu





Uzavřená množina stavů

Kontrolní úkol 4.8. Jak je to s dosažitelností stavů v případě náhodné procházky s odražejícími stěnami?

Definice 4.7. Neprázdná množina C stavů Markovova řetězce je **uzavřená**, jestliže žádný stav vně množiny C není dosažitelný z žádného stavu uvnitř C . Nejmenší uzavřená množina obsahující C se nazývá **uzávěr** množiny C .

Uzavřená množina stavů C představuje samozřejmě také Markovův řetězec. Příslušnou matici přechodu dostaneme vynecháním těch řádků a sloupců, které odpovídají stavům nacházejícím se vně množiny C .

Věta 4.6. Množina stavů C je uzavřená právě tehdy, když platí

$$\forall s_i \in C, \forall s_j \notin C: p_{ij} = 0.$$

Důkaz. (\Rightarrow) Vyplývá přímo z definice uzavřené množiny.

(\Leftarrow) Předpokládejme, že je splněna podmínka uvedená v dokazované větě. Pak ale musí platit (vzhledem k definici uzavřené množiny stavů) $p_{ij}^{(n)} = 0$ pro všechna $n > 0$. \square

Nyní přejdeme k definici nerozložitelného Markovova řetězce.

Definice 4.8. Markovův řetězec se nazývá **nerozložitelný**, jestliže v něm kromě množiny všech stavů neexistuje žádná jiná uzavřená množina stavů. V opačném případě se Markovův řetězec nazývá **rozložitelný**.

Věta 4.7. Markovův řetězec je nerozložitelný, právě když každý jeho stav je dosažitelný z každého jiného stavu.

Důkaz vyplývá přímo z definic uvedených v tomto odstavci. \square

Markovův řetězec z příkladu 4.1 je zřejmě rozložitelný (stavy s_0 a s_a jsou absorpční a tvoří uzavřenou množinu), zatímco řetězec z příkladů 4.2 je nerozložitelný.

Věta 4.8. Markovův řetězec s konečně mnoha stavy je rozložitelný, právě když jeho přechodová matice má (po případném přečíslování) tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix},$$

kde v diagonálních polích jsou čtvercové matice \mathbf{P}_1, \mathbf{B} a v pravém horním poli nulová matice.

Důkaz. Stačí přečíslovat stavy tak, aby nejnižší pořadová čísla příslušela stavům uzavřené množiny. Uvedené tvrzení pak vyplývá z věty 4.4. \square

Příklad 4.8. Nechť je dán Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu



Nerozložitelný MŘ
Rozložitelný MŘ



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda je řetězec rozložitelný nebo nerozložitelný.

Řešení. Stavy s_1 a s_5 tvoří zřejmě uzavřenou množinu, proto je řetězec rozložitelný. Přečíslijeme-li stavy podle schématu $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) \rightarrow (\tilde{s}_1, \tilde{s}_3, \tilde{s}_4, \tilde{s}_5, \tilde{s}_2)$, dostaneme

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Doporučujeme čtenáři, aby si při určování dosažitelnosti stavů nebo rozložitelnosti Markovova řetězce kreslil diagram s šípkami reprezentujícími přechody mezi jednotlivými stavy řetězce.



Kontrolní úkoly

4.9. Rozhodněte, zda je Markovův řetězec s přechodovou maticí

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

rozložitelný nebo nerozložitelný.

4.10. Rozhodněte, zda je Markovův řetězec s přechodovou maticí

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rozložitelný nebo nerozložitelný.



Definice 4.9. Stavy s_i a s_j jsou **téhož typu**, jestliže jsou

- oba přechodné,
- oba trvalé nulové,
- oba trvalé nenulové a neperiodické
- oba trvalé nenulové a periodické.



Věta 4.9. Je-li stav s_j dosažitelný ze stavu s_i a naopak, jsou oba stavy téhož typu.

Důkaz. Z předpokladů věty plyne, že existují přirozená čísla M a N taková, že $p_{ij}^{(N)} = \alpha > 0$, $p_{ji}^{(M)} = \beta > 0$. Pro libovolné přirozené n zřejmě platí

$$p_{ii}^{(n+N+M)} \geq p_{ij}^{(N)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(M)} = \alpha \beta p_{jj}^{(n)}$$

a také

$$p_{jj}^{(n+N+M)} \geq p_{ji}^{(M)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(N)} = \alpha \beta p_{ii}^{(n)}.$$

Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < +\infty$, z prvního z uvedených vztahů vyplývá, že také

$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < +\infty$. To podle věty 4.4 znamená, že je-li stav s_i přechodný, je také stav s_j přechodný. Analogicky se provede důkaz i pro stavy ostatních typů. \square



Důsledek. V nerozložitelném Markovově řetězci jsou všechny stavy téhož typu.

Na závěr tohoto odstavce uvedeme ještě větu pro periodické stavy nerozložitelného Markovova řetězce.



Věta 4.10. Nechť je dán nerozložitelný Markovův řetězec, jehož všechny stavy jsou periodické s periodou λ . Pak existuje rozklad množiny všech stavů na λ podmnožin $G_0, G_1, \dots, G_{\lambda-1}$ takový, že přechody po jednom kroku ze stavů množiny G_ν jsou možné jen do stavů množiny $G_{\nu+1}$ ($0 \leq \nu \leq \lambda-2$), resp. ze stavů množiny $G_{\lambda-1}$ do stavů množiny G_0 .



Příklad 4.9. Nechť je dán Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vyšetřete periodicitu jeho stavů.

Řešení. Uvedený Markovův řetězec je podle věty 4.7 nerozložitelný, což znamená, že všechny jeho stavy jsou stejného typu. Spočteme mocniny matice \mathbf{P} :

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Všechny stavy řetězce jsou trvalé nenulové a periodické s periodou $\lambda = 3$, protože mocniny \mathbf{P}^{3k} , $k \geq 1$, mají na hlavní diagonále vesměs nenulové prvky, kdežto ostatní mocniny mají na hlavní diagonále samé nuly. Množinu jeho stavů lze podle věty 4.10 rozložit na tři podmnožiny takto: $G_0 = \{s_1, s_2\}$, $G_1 = \{s_4\}$, $G_2 = \{s_3\}$. Můžete se o tom snadno přesvědčit.

4.7. Stacionární rozdělení

Nechť je dán nerozložitelný Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu \mathbf{P} .

Definice 4.10. Vektor $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots)$ se nazývá **stacionární rozdělení** tohoto nerozložitelného Markovova řetězce, jestliže platí $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$ pro všechna j neboli maticově $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$, přičemž všechny

Stacionární rozdělení

prvky vektoru jsou nenulové a $\sum_{i=1} \pi_i = 1$.

Stacionaritu lze interpretovat následujícím způsobem. Mějme velký počet nezávislých systémů (např. částic), které se řídí stejným Markovovým řetězcem. Podle zákona velkých čísel je relativní četnost částic, které jsou v čase $t = n$ ve stavu s_i , přibližně rovna pravděpodobnosti $a_i^{(n)}$. V případě stacionarity je tedy rozdělení relativních četností částic v jednotlivých stavech neměnné v čase.

Věta 4.11. V nerozložitelném Markovově řetězci existuje stacionární rozdělení, právě když všechny stavy jsou trvalé nenulové. Toto rozdělení je jediné a pro všechna i, j platí



$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} > 0 \text{ v případě neperiodickém,}$$

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n p_{ij}^{(v)} > 0 \text{ v případě periodickém.}$$

Důkaz této věty (poněkud zdlouhavý) je uveden ve skriptech [3]. \square

Věty 4.11 se užívá často jako kritéria pro klasifikaci stavů daného nerozložitelného Markovova řetězce. Zjistíme-li totiž, že existuje stacionární rozdělení, pak jsou všechny stavy takového řetězce trvalé nenulové.

Příklad 4.10. Nechť je dán Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu (náhodná procházka s odražujícími stěnami)



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \end{pmatrix},$$

kde $p + q = 1$. Určete stacionární rozdělení a proveďte klasifikaci stavů.

Řešení. Markovův řetězec je podle věty 4.7 nerozložitelný, a tedy všechny jeho stavy jsou téhož typu. Rovnice pro určení stacionárního rozdělení mají tvar

$$\begin{aligned} \pi_1 &= q\pi_1 + q\pi_2, \\ \pi_j &= p\pi_{j-1} + q\pi_{j+1} \quad \text{pro } j \geq 2. \end{aligned}$$

Postupným řešením těchto rovnic dostaneme

$$\pi_2 = \frac{p}{q}\pi_1, \quad \pi_3 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \pi_1, \quad \dots$$

nebo obecně

$$\pi_j = \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1} \pi_1 \quad \text{pro } j \geq 1.$$

Rozlišíme dva případy.

a) Je-li $p < q$, pak $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = \pi_1 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^j = \frac{\pi_1}{1 - \frac{p}{q}} = 1$,

z čehož vyplývá, že $\pi_1 = 1 - \frac{p}{q}$. Stacionární rozdělení zřejmě existuje,

protože všechna π_j jsou kladná a platí $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1$. Toto rozdělení má tvar

$$\pi_j = \left(1 - \frac{p}{q}\right) \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}.$$

V tomto případě jsou všechny stavy Markovova řetězce podle věty 4.11 trvalé nenulové.

b) Je-li ovšem $p \geq q$, potom pro libovolné $\pi_1 > 0$ platí $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = +\infty$, a tedy stacionární rozdělení neexistuje. V tomto případě věta 4.11 říká jen to, že všechny stavy jsou buď přechodné nebo trvalé nulové.

Kontrolní úkoly

14.11. Nechť je dán Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \end{pmatrix}.$$

Určete stacionární rozdělení, případně proveďte klasifikaci stavů tohoto řetězce.

14.12. Uvažujte model havarijního pojištění. Necht' pojišťovna používá tři kategorie pojistného pro pojištění automobilů: s_1 - základní pojistné, s_2 - bonus 30 %, s_3 - bonus 50 %. Průběh platby lze modelovat Markovovým řetězcem s množinou stavů $\{s_1, s_2, s_3\}$ a výchozím stavem s_1 . Přejechy o kategorii výše nastávají při beznehodovém provozu automobilu. Nastane-li alespoň jedna nehoda, je pojištěný zařazen v následujícím roce do stavu s_1 . Jestliže se počet nehod v daném roce řídí Poissonovým rozdělením s parametrem λ , má matice pravděpodobností přechodu tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \\ 1 - e^{-\lambda} & 0 & e^{-\lambda} \end{pmatrix}.$$

Určete stacionární rozdělení.

Definice 4.11. Matice s nezápornými prvky, jejíž všechny řádkové i sloupcové součty jsou rovny 1, se nazývá **dvojně stochastická**.

Pro dvojně stochastické matice pravděpodobností přechodu platí užitečná věta.

Věta 4.12. Necht' je dán nerozložitelný Markovův řetězec s dvojně stochastickou maticí pravděpodobností přechodu \mathbf{P} .

a) Je-li počet stavů řetězce konečný a rovný N , pak stacionární rozdělení existuje a má tvar

$$\pi_j = \frac{1}{N} \text{ pro všechna } 1 \leq j \leq N.$$

b) Je-li počet stavů nekonečný, stacionární rozdělení neexistuje.

Důkaz.

a) Stačí ověřit, že $\pi_j = \frac{1}{N}$ pro všechna $1 \leq j \leq N$ je skutečně řešením soustavy rovnic v definici stacionárního rozdělení. Dostaneme

$$\pi_j = \sum_{i=1}^N \pi_i p_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_{ij} = \frac{1}{N} \cdot 1 = \frac{1}{N}.$$

b) Důkaz provedeme sporem. Pro jednoduchost uvažujeme neperiodický případ, kdy pro všechna i, j platí $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} > 0$. Z definice dvojně stochastické matice \mathbf{P} platí, že i každá její mocnina je dvojně stochastická,

Dvojně
stochastická matice

takže $\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = 1$ pro každé j . Pro libovolné N tedy platí $1 \geq \sum_{i=1}^N p_{ij}^{(n)}$. Odtud limitním přechodem pro $n \rightarrow \infty$ dostaneme $1 \geq \frac{N}{\mu_j}$, tj. $\frac{1}{\mu_j} = 0$, což je spor. \square

4.8. Přechodné stavy Markovova řetězce

Markovovy řetězce obsahují obecně trvalé i přechodné stavy. Označme množinu všech přechodných stavů T . Necht' $s_j \in T$ je nějaký přechodný stav a C nějaká nerozložitelná uzavřená množina trvalých stavů. V této části ukážeme, jak se počítá pravděpodobnost x_j toho, že systém, který je na počátku ve stavu s_j , vstoupí někdy do množiny C (je **absorbován množinou C**). Výraz $1 - x_j$ pak reprezentuje pravděpodobnost toho, že systém setrvá navždy v množině T , nebo bude absorbován nějakou jinou uzavřenou množinou trvalých stavů.

Absorpce uzavřenou množinou trvalých stavů



Věta 4.13. Pravděpodobnosti x_j pro stav $s_j \in T$ vyhovují soustavě rovnic

$$x_j - \sum_{v \in T} p_{jv} x_v = x_j^{(1)}, \quad (4.2)$$

kde $x_j^{(1)} = \sum_{k \in C} p_{jk}$ značí pravděpodobnost přechodu systému ze stavu s_j do množiny C už v prvním kroku.

Důkaz. Označme $x_j^{(n)}$ pravděpodobnost absorpce množinou C právě v n -tém kroku. Pak zřejmě platí $x_j = \sum_{n=1}^{\infty} x_j^{(n)}$. Pravděpodobnosti $x_j^{(n)}$ splňují rekurentní vztah $x_j^{(n+1)} = \sum_{v \in T} p_{jv} x_v^{(n)}$ pro všechna $n \geq 1$ a každé $s_j \in T$. Sečtením přes všechna n skutečně dostaneme vztah (4.2). \square

Zbývá ještě zodpovědět otázku, kdy jsou pravděpodobnosti x_j jediným řešením soustavy rovnic (4.1).

Věta 4.14. V Markovově řetězci s konečně mnoha stavy jsou pravděpodobnosti x_j jediným řešením soustavy (4.2).

Důkaz je uveden v pracích [3,5]. \square

Příklad 4.11. Uvažujme náhodnou procházku s absorbuujícími stěnami a položme $C = \{s_0\}$. Spočteme pravděpodobnosti x_j ($1 \leq j \leq a-1$), že částice vycházející z bodu j (ze stavu s_j) bude pohlcena ve stavu s_0 .

Řešení. Soustava rovnic (4.2) má v tomto případě tvar

$$\begin{aligned} x_1 - q &= px_2, \\ x_j &= px_{j+1} + qx_{j-1} \quad \text{pro } 2 \leq j \leq a-2, \\ x_{a-1} &= qx_{a-2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$



Dodefinujeme

$$x_0 = 1 \text{ (částice ve stavu } s_0 \text{ už je),} \quad (4.4)$$

$$x_a = 0 \text{ (částice ze stavu nemůže uniknout).}$$

Soustava rovnic (4.3) je ekvivalentní diferenční rovnici

$$px_{j+1} - x_j + qx_{j-1} = 0, \quad 1 \leq j \leq a-1, \quad (4.5)$$

s okrajovými podmínkami (4.4).

Její řešení budeme hledat ve tvaru $x_j = \lambda^j$, kde λ představují kořeny charakteristické rovnice $p\lambda^2 - \lambda + q = 0$. Snadno nalezneme: $\lambda_1 = 1$ a

$\lambda_2 = \frac{q}{p}$. Dále rozlišíme dva případy.

- a) Je-li $p = q = \frac{1}{2}$, má charakteristická rovnice dvojnásobný reálný kořen rovný 1. Obecné řešení (4.5) je v tomto případě

$$x_j = A \cdot 1^j + jB \cdot 1^j = A + jB.$$

Konstanty A, B určíme z okrajových podmínek (4.4): $A = 1, B = -\frac{1}{a}$.

Výsledné řešení diferenční rovnice má tedy tvar $x_j = 1 - \frac{j}{a}, \quad 1 \leq j \leq a-1$.

- b) V případě $p \neq q$ je obecné řešení diferenční rovnice (4.5)


$$x_j = A \cdot 1^j + B \left(\frac{q}{p} \right)^j.$$

Z okrajových podmínek (4.4) dostaneme:

$$A = -\frac{\left(\frac{q}{p} \right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^a}, \quad B = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^a},$$

Výsledné řešení diferenční rovnice je tedy

$$x_j = \frac{\left(\frac{q}{p} \right)^a - \left(\frac{q}{p} \right)^j}{\left(\frac{q}{p} \right)^a - 1}, \quad 1 \leq j \leq a-1.$$



Všimněte si analogie mezi řešením této diferenční rovnice a řešením homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty. Rozdíl je ve tvaru hledaného řešení.



Kontrolní úkoly

4.13. Uvažujte náhodnou procházku s absorbuujícími stěnami a položme $C = \{s_a\}$. Spočteme pravděpodobnosti x_j ($1 \leq j \leq a-1$), že částice vycházející z bodu j (ze stavu s_j) bude pohlcena ve stavu s_a .

4.14. Je dán Markovův řetězec s množinou stavů $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ a maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nechť počáteční stav je s_2 . Určete pravděpodobnost, že systém někdy skončí ve stavu s_1 .



Pojmy k zapamatování:

- Markovská vlastnost,
- Markovův řetězec s diskrétním časem,
- Markovův řetězec homogenní,
- Markovův řetězec nehomogenní,
- množina stavů Markovova řetězce,
- matice pravděpodobností přechodu,
- počáteční rozdělení pravděpodobností,
- pravděpodobnosti přechodu vyšších řádů,
- Perronův vzorec,
- doba návratu do daného stavu,
- doba čekání na první průchod daným stavem,
- stav trvalý,
- stav přechodný,
- stav trvalý nenulový,
- stav trvalý nulový,
- stav trvalý nenulový neperiodický = stav ergodický,
- stav trvalý nenulový periodický (s periodou λ),
- dosažitelnost stavu,
- uzavřená množina stavů,
- Markovův řetězec nerozložitelný,
- Markovův řetězec rozložitelný,
- stavy téhož typu,
- stacionární rozložení,
- absorpce uzavřenou množinou trvalých stavů.

Shrnutí

V této kapitole vycházíme z pojmu Markovova řetězce s diskrétními stavy a diskrétním časem. Zavádíme základní pojmy teorie takových Markovových řetězců (např. množina stavů, pravděpodobnosti přechodů,



počáteční rozdělení, rozložitelné a nerozložitelné řetězce, stacionární rozdělení), předkládáme čtenáři klasifikaci stavů (stavy trvalé a přechodné, stavy trvalé nenulové a nulové, stavy trvalé nenulové neperiodické a periodické) a odvozujeme rovnice pro výpočet pravděpodobnosti absorpce v nějaké uzavřené množině trvalých stavů.

5. KONEČNÉ MARKOVOVY ŘETĚZCE SE SPOJITÝM ČASEM

Po prostudování této kapitoly:

- pochopíte základní pojmy teorie (Markovův řetězec se spojitým časem, Chapmanova-Kolmogorovova rovnost, pravděpodobnost přechodu, intenzity přechodu, limitní rozdělení),
- naučíte se konstruovat matici intenzit přechodu,
- naučíte se počítat pravděpodobnosti stavů v daném čase a limitní pravděpodobnosti.

Úvod této kapitoly je věnován obecně Markovovým řetězcům s diskrétními stavy a spojitým časem. Následuje rozsáhlá část zabývající se speciálně problematikou Markovových řetězců s konečnou množinou stavů. Doporučujeme Vám, abyste učinili vše pro pochopení teoretických základů, bez nichž nedokážete vyřešit předložené konkrétní úkoly, ani korespondenční úkol, který následuje za poslední kapitolou.

5.1. Definice Markovova řetězce se spojitým časem

Definice 5.1. Soustava celočíselných náhodných veličin $\{X_t, t \geq 0\}$, kde parametr t nabývá hodnot z množiny všech nezáporných reálných čísel, se nazývá **Markovův řetězec se spojitým časem**, jestliže platí

$$P(X_{t+h} = j \mid X_t = i, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_r} = i_r) = P(X_{t+h} = j \mid X_t = i)$$

pro všechna $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r < t < t+h$ a všechna přirozená čísla $i_1, i_2, \dots, i_r, i, j$. Podmíněné pravděpodobnosti $P(X_{t+h} = j \mid X_t = i)$ se nazývají **pravděpodobnosti přechodu** a označují zpravidla $p_{ij}(t, t+h)$.

Jestliže pravděpodobnosti přechodu závisejí pouze na h a nikoliv na t , značí se $p_{ij}(h)$ a příslušný **Markovův řetězec** se nazývá **homogenní**. V případě, že tyto pravděpodobnosti závisejí na t i h , mluvíme o **nehomogenním Markovově řetězci**.

V dalším výkladu se omezíme pouze na homogenní Markovovy řetězce. Časovou proměnnou budeme označovat písmeny t , resp. s , namísto písmena h .

Markovův řetězec se spojitým časem je určen:

- množinou stavů $\{s_1, s_2, \dots\}$,
- vektorem počátečního rozdělení pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (p_1(0), p_2(0), \dots)$, $\sum_v p_v(0) = 1$,



Markovův řetězec se spojitým časem

Pravděpodobnosti přechodu

Homogenní MŘ
Nehomogenní MŘ



Množina stavů
Počáteční rozdělení MŘ

Soustava matic pravděpodobností přechodu

- **soustavou matic pravděpodobností přechodu** $\{\mathbf{P}(t)\}_{t \geq 0}$, přičemž $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ (\mathbf{I} je jednotková matice).

Pravděpodobnostní rozdělení Markovova řetězce v libovolném čase t se spočte, stejně jako v případě řetězců s diskrétním časem, pomocí vztahu

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(t).$$

5.2. Chapmanova-Kolmogorovova rovnost

Stejně jako pro Markovovy řetězce s diskrétním časem platí i v případě Markovových řetězců se spojitým časem následující tvrzení.



Věta 5.1. Pro všechna $s \geq 0, t \geq 0$ a libovolná přirozená čísla i, j platí $p_{ij}(s+t) = \sum_v p_{iv}(s)p_{vj}(t)$

nebo v maticovém tvaru $\mathbf{P}(s+t) = \mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t)$.

Důkaz. Využijeme věty o úplné pravděpodobnosti. Označme jevy $A = \{X_{t_0+s+t} = j\}$, $B_v = \{X_{t_0+s} = v\}$, $C = \{X_{t_0} = i\}$. Podle uvedené věty postupně dostaneme

$$P(X_{t_0+s+t} = j | X_{t_0} = i) = \sum_v P(X_{t_0+s} = v | X_{t_0} = i)P(X_{t_0+s+t} = j | X_{t_0+s} = v, X_{t_0} = i).$$

Z definice Markovova řetězce však plyne

$$P(X_{t_0+s+t} = j | X_{t_0+s} = v, X_{t_0} = i) = P(X_{t_0+s+t} = j | X_{t_0+s} = v),$$

a dosazením do předcházejícího vztahu dostaneme dokazované tvrzení. \square

Právě uvedený vztah se nazývá **Chapmanova-Kolmogorovova rovnost**. Této rovnosti se v praxi využívá k dokazování různých vlastností pravděpodobností přechodu.

Naopak lze dokázat, že ke každému pravděpodobnostnímu vektoru \mathbf{p} a každému systému stochastických matic $\{\mathbf{P}(t)\}_{t \geq 0}$, které splňují Chapmanovu-Kolmogorovovu rovnost, existuje homogenní Markovův řetězec, jehož počáteční rozdělení je dáno vektorem \mathbf{p} a systém matic pravděpodobností přechodu je právě $\{\mathbf{P}(t)\}_{t \geq 0}$.

5.3. Konečné Markovovy řetězce se spojitým časem

V dalším výkladu budeme předpokládat, že:

- množina stavů Markovova řetězce je konečná $\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$,
- pravděpodobnosti přechodu jsou spojitě v bodě (čase) 0 zprava, tj.
$$\lim_{t \rightarrow 0^+} p_{ij}(t) = \delta_{ij} \text{ pro všechna } i, j. \quad (5.1)$$



Věta 5.2. Pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t)$ jsou stejnoměrně spojitě v intervalu $0 \leq t < +\infty$.

Chapmanova-Kolmogorovova rovnost

Důkaz. Podle Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnosti platí pro každé $h > 0$

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{v=1}^N p_{iv}(t)p_{vj}(h), \text{ tj.}$$

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) = \sum_{v \neq j} p_{iv}(t)p_{vj}(h) - p_{ij}(t)(1 - p_{jj}(h)),$$

$$|p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| \leq \sum_{v \neq j} p_{vj}(h) + (1 - p_{jj}(h)).$$

Pravá strana uvedené nerovnosti „jde“ pro $h \rightarrow 0+$ podle předpokladu (5.1) k nule a přitom nezávisí na t . Podobně lze postupovat i v případě $|p_{ij}(t) - p_{ij}(t-h)|$. \square

Věta 5.3. Pro každé přirozené $1 \leq i \leq N$ a pro všechna reálná $t \geq 0$ platí $p_{ii}(t) > 0$.

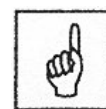


Důkaz. Z předpokladu (5.1) plyne, že $p_{ii}(t) > 0$ pro všechna dostatečně malá t , např. pro $0 \leq t \leq \delta$. Ze zřejmé nerovnosti

$$p_{ii}(t) \geq p_{ii}(\delta)p_{ii}(t-\delta)$$

následně vyplývá, že $p_{ii}(t) > 0$ také pro všechna $\delta \leq t \leq 2\delta$ atd. \square

Věta 5.4. Pro každou dvojici přirozených čísel $i \neq j$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq N$, platí buď $p_{ij}(t) \equiv 0$ pro všechna reálná $t \geq 0$ anebo $p_{ij}(t) > 0$ pro všechna reálná $t > 0$.



Důkaz naleznete ve skriptech [4]. \square

Věty 5.3 a 5.4 nám umožňují zavést klasifikaci stavů i pro Markovovy řetězce se spojitým časem.

5.4. Klasifikace stavů

Uvažujme Markovův řetězec s diskretním časem $t_0 > 0, 2t_0, 3t_0, \dots$ a s maticí pravděpodobností přechodu po jednom kroku $\mathbf{P}(t_0)$. Tato matice rozhoduje o nerozložitelnosti nebo rozložitelnosti řetězce, v případě rozložitelného řetězce jednoznačně určuje rozklad množiny všech stavů na disjunktní uzavřené (a nerozložitelné) množiny trvalých stavů a množinu stavů přechodných a také případnou periodicitu stavů. Přitom nezáleží na konkrétních numerických hodnotách prvků této matice, ale pouze na tom, které z nich jsou kladné a které nulové. Uvedená vlastnost se však podle vět 5.2 a 5.3 nemění s hodnotou t_0 , tj. klasifikace stavů uvažovaného řetězce je pro všechna $t_0 > 0$ stejná. To je důvod, proč můžeme již zavedenou klasifikaci stavů (viz odstavec 4.5) převzít i pro Markovovy řetězce se spojitým časem.

Pro Markovovy řetězce se spojitým časem platí navíc následující věta.



Věta 5.5. V Markovově řetězci se spojitým časem neexistují stavy periodické.

Důkaz. Pro všechna reálná $t \geq 0$ a pro všechny diagonální prvky matice pravděpodobností přechodu platí $p_{ii}(t) > 0$, takže v Markovově řetězci se spojitým časem nemohou podle kritéria neperiodičnosti (viz odstavec 4.5) existovat periodické stavy. \square

5.5. Intenzity přechodu a jejich vlastnosti

V teorii Markovových řetězců se spojitým časem hrají významnou roli intenzity přechodu.



Věta 5.6. Pro každé přirozené $1 \leq i \leq N$ existuje

$$q_i = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} < +\infty.$$

Důkaz je ve skriptech [4]. \square

Veličina q_i se nazývá **celková intenzita přechodu ze stavu s_i** .

Celková intenzita přechodu



Věta 5.7. Pro každou dvojici $i \neq j$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq N$, existuje

$$q_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(t)}{t},$$

přičemž platí $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$.

Důkaz je ve skriptech [4]. \square

Dílčí intenzita přechodu

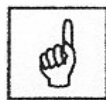
Veličina q_{ij} je **dílčí intenzita přechodu ze stavu s_i do stavu s_j** .

Poznámka. Pro právě zavedené intenzity přechodu zřejmě platí

$$q_i = - \left. \frac{dp_{ii}(t)}{dt} \right|_{t \rightarrow 0^+} \text{ pro } 1 \leq i \leq N,$$

$$q_{ij} = \left. \frac{dp_{ij}(t)}{dt} \right|_{t \rightarrow 0^+} \text{ pro } i \neq j, 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N.$$

Význam právě zavedených intenzit přechodu je zřejmý z následujících vět, které uvádíme bez důkazu.



Věta 5.8. Je-li $q_i > 0$, pak doba setrvání systému ve stavu s_i (doba od vstupu do stavu s_i do výstupu ze stavu s_i) má exponenciální rozdělení s parametrem q_i a střední hodnotou $1/q_i$.



Věta 5.9. Je-li $q_i > 0$, pak pravděpodobnost toho, že se první přechod z počátečního stavu s_i uskuteční právě do stavu $s_j \neq s_i$, je rovna q_{ij}/q_i .

Matice intenzit přechodu

Zavedeme **matici intenzit přechodu** $\mathbf{Q} = (q_{ij})$, $1 \leq i, j \leq N$, v níž q_{ij} pro $i \neq j$ jsou dílčí intenzity přechodu a pro diagonální prvky platí

$$q_{ii} = -q_i = -\sum_{j \neq i} q_{ij}.$$

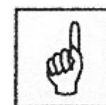
Tato matice není stochastická, její řádkové součty jsou zřejmě rovny 0.

5.6. Kolmogorovovy diferenciální rovnice a jejich řešení

Nejprve odvodíme Kolmogorovovy diferenciální rovnice pro nalezení pravděpodobností $p_{ij}(t)$ pomocí intenzit přechodu q_{ij} . Přitom budeme vycházet ze skutečnosti, že $p_{ij}(t)$ mají spojité derivace (viz např. [4]).

Věta 5.10. Pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t)$ splňují obě následující soustavy diferenciálních rovnic (zapsané v maticovém tvaru)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(t) &= \mathbf{Q}\mathbf{P}(t), \\ \mathbf{P}'(t) &= \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}. \end{aligned} \tag{5.2}$$



Důkaz. Vyjdeme z Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnosti (viz věta 5.1). Jestliže derivujeme tuto rovnost podle proměnné s a položíme $s = 0$, dostaneme (s použitím intenzit přechodu)

$$p'_{ij}(t) = -q_i p_{ij}(t) + \sum_{v \neq i} q_{iv} p_{vj}(t) \text{ pro } 1 \leq i, j \leq N.$$

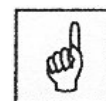
Již dříve jsme ukázali, že platí $q_{ii} = -q_i$, tím je platnost soustavy $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$ dokázána. Platnost druhé z uvedených soustav diferenciálních rovnic se dokáže analogicky (derivováním Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnosti podle proměnné t a položením $t = 0$). \square

Soustavy diferenciálních rovnic (5.2) se nazývají **Kolmogorovovy diferenciální rovnice**. Přitom první soustava se nazývá **retrospektivní** a druhá **prospektivní**.

Kolmogorovovy
diferenciální rovnice

Věta 5.11. Necht' $\mathbf{Q} = (q_{ij})$, $1 \leq i, j \leq N$, je libovolná matice taková, že

- $q_{ij} > 0$ pro všechna $i \neq j$,
- $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$.



Pak obě soustavy (5.2) mají jediné řešení vyhovující počáteční podmínce $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$. Tato řešení jsou si rovna a reprezentují soustavu matic pravděpodobností přechodu nějakého Markovova řetězce se spojitým časem.

Důkaz naleznete ve skriptech [4]. \square

Soustavy (5.2) představují soustavy homogenních lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty. Jejich obecné řešení má zřejmě tvar $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(0)e^{\mathbf{Q}t}$. Proto řešení vyhovující počáteční podmínce $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ můžeme zapsat ve tvaru $\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t}$. Matice $e^{\mathbf{Q}t}$ se přitom počítá zpravidla pomocí Perronova vzorce (viz odstavec 4.2).



Příklad 5.1. Model práce stroje (viz [13]). Doba bezporuchového provozu stroje je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $1/\alpha$, $\alpha > 0$. Dojde-li k poruše, oprava je zahájena okamžitě, přitom doba opravy je také náhodná veličina s exponenciálním rozdělením a střední hodnotou $1/\beta$, $\beta > 0$. Po dokončení opravy je stroj okamžitě uveden do provozu. Definujme náhodnou veličinu X_t tak, že nabývá hodnotu 0, je-li stroj v čase t v provozu, a hodnotu 1, je-li stroj v tomto čase opravován, pak $\{X_t, t \geq 0\}$ je Markovův řetězec se spojitým časem a dvěma stavy: $s_1 = 0$, $s_2 = 1$. Matice intenzit přechodu má zřejmě tvar

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}.$$

Určíme pravděpodobnosti přechodu pomocí Perronova vzorce.

Řešení. Charakteristická čísla matice \mathbf{Q} jsou: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -(\alpha + \beta)$. Snadno spočteme

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{Q}) = \lambda(\lambda + \alpha + \beta),$$

$$\text{adj}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \lambda + \beta & \alpha \\ \beta & \lambda + \alpha \end{pmatrix}.$$

Dále dostaneme

$$\psi_1(\lambda) = \frac{\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{Q})}{\lambda - \lambda_1} = \lambda + \alpha + \beta,$$

$$\psi_2(\lambda) = \frac{\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{Q})}{\lambda - \lambda_2} = \lambda.$$

Dosadíme do Perronova vzorce a upravíme

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t} = \frac{e^{\lambda_1 t}}{\psi_1(\lambda_1)} \text{adj}(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q}) + \frac{e^{\lambda_2 t}}{\psi_2(\lambda_2)} \text{adj}(\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{Q}) =$$

$$= \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha e^{-(\alpha + \beta)t} & \alpha - \alpha e^{-(\alpha + \beta)t} \\ \beta - \beta e^{-(\alpha + \beta)t} & \alpha + \beta e^{-(\alpha + \beta)t} \end{pmatrix}.$$

Výpočet pravděpodobností přechodu podle Perronova vzorce je při řešení praktických příkladů velmi náročný. Mnohem snazší je počítat tzv. limitní pravděpodobnosti (viz následující odstavec).

5.7. Limitní pravděpodobnosti

Limitní
pravděpodobnosti

Pro nerozložitelné Markovovy řetězce se spojitým časem lze dokázat (viz [4, 13]), že existují **limitní pravděpodobnosti**

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t), \quad 1 \leq j \leq N,$$

kteře nezávisejí na vřchozím stavu $s_i, 1 \leq i \leq N$, jsou vesměš kladné a navíc splňují rovnost $\sum_{j=1}^N \pi_j = 1$.

Pro výpočet těchto limitních pravděpodobností platí následující věta.

Věta 5.12. Vektor limitních pravděpodobností $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$ je řešením soustavy algebraických rovnic



$$\sum_{i=1}^N \pi_i q_{ij} = 0, \text{ tj. v maticovém tvaru } \boldsymbol{\pi} \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5.3)$$

s podmínkou $\pi_j > 0, 1 \leq j \leq N, \sum_{j=1}^N \pi_j = 1$.

Důkaz. Vektor $\boldsymbol{\pi}$ představuje zřejmě stacionární rozdělení pro Markovův řetězec s diskřétním časem $h, 2h, 3h, \dots$ a maticí pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}(h), h > 0$ (viz odstavec 4.7), což znamená

$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}(h), h > 0$. Odtud dostaneme $\boldsymbol{\pi} \left(\frac{\mathbf{I} - \mathbf{P}(h)}{h} \right) = \mathbf{0}, h > 0$. Limitním přechodem pro $h > 0$ nakonec získáme vztah (5.3). \square

Příklad 5.2. Necht' matice intenzit přechodu nějakého konečného Markovova řetězce se spojitým časem má tvar



$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -q & q & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -q & q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q & q & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -q & q \\ q & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -q \end{pmatrix}.$$

Určime limitní pravděpodobnosti takového řetězce.

Řešení. Soustava rovnic (5.3) má v tomto případě tvar

$$\begin{aligned} -\pi_1 q + \pi_N q &= 0, \\ \pi_1 q - \pi_2 q &= 0, \\ \pi_2 q - \pi_3 q &= 0, \\ &\dots, \\ \pi_{N-1} q - \pi_N q &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy snadno dostaneme $\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_N$. Dále použijeme podmínku $\sum_{j=1}^N \pi_j = 1$. Z ní ovšem okamžitě plyne výsledek

$$\pi_j = \frac{1}{N} \text{ pro } 1 \leq j \leq N.$$



Kontrolní úkol 5.1. Necht' matice intenzit přechodu nějakého konečného Markovova řetězce se spojitým časem má tvar

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -q & q & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -q & q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q & q & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -q & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete limitní pravděpodobnosti takového řetězce, pokud existují. V případě, že limitní pravděpodobnosti neexistují, zdůvodněte proč.

5.8. Aplikace konečných řetězců se spojitým časem

Předpokládejme, že umíme určit matici intenzit přechodu \mathbf{Q} . Pak se v aplikacích řeší úlohy dvojího typu:

- nalezení absolutních pravděpodobností $p_j(t)$ jednotlivých stavů v čase t při zadaném počátečním stavu s_i ,
- nalezení limitních pravděpodobností π_j .

V prvním případě řešíme Kolmogorovovy diferenciální rovnice s počáteční podmínkou $p_i(0) = 1, p_j(0) = 0$ pro $j \neq i$. Hledané pravděpodobnosti $p_j(t)$ představují vlastně i -tý řádek matice $\mathbf{P}(t)$. Ve druhém případě se řeší soustava příslušných lineárních algebraických rovnic (5.3).

Ve skriptech [4, 14] jsou popsány aplikace v následujících oblastech:

- hromadná obsluha strojů,
- odběr proudu,
- provoz telefonní ústředny,
- reakční kinetika.

V tomto odstavci rozebereme podrobně příklad reálné situace (hromadná obsluha strojů), který lze jednoduše popsat pomocí konečného Markovova řetězce se spojitým časem.



Příklad 5.3. Předpokládejme, že v nějaké dílně pracuje celkem N strojů stejného typu. V libovolném okamžiku může nastat porucha kteréhokoliv stroje, a tedy potřeba jej opravit. Dále předpokládejme, že se o stroje stará r opravářů, přičemž se na opravě podílí vždy jen jeden opravář. Stroj se v případě poruchy začne okamžitě opravovat, pokud je ovšem některý z opravářů volný. Porouchá-li se stroj v okamžiku, kdy jsou všichni opraváři zaměstnáni, musí se čekat, až se některý z nich uvolní.

Stroj, který pracuje v čase t , se během krátkého časového intervalu $(t, t+h)$ porouchá s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$, kde $\lambda > 0$ je konstanta a $o(h)$ představuje nekonečně malou veličinu řádu vyššího než h , pro níž

platí $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Stroj, jenž se v čase t opravuje, bude uveden do provozu během časového intervalu $(t, t+h)$ s pravděpodobností $\mu h + o(h)$, kde $\mu > 0$ je konstanta.

Předpokládejme, že v čase t je mimo provoz právě j strojů. Počet strojů mimo provoz je zřejmě náhodná veličina s binomickým rozdělením. Proto platí:

- Pravděpodobnost $p_{j,j+1}(h)$, že se počet strojů, které nepracují, zvětší během intervalu $(t, t+h)$ o 1, je přímo úměrná počtu strojů, jež v čase t pracují, tj.

$$\binom{N-j}{1} (\lambda h + o(h))^1 (1 - \lambda h + o(h))^{N-j-1} \approx (N-j) \lambda h + o(h), \quad 0 \leq j < N.$$

- Pravděpodobnost $p_{j,j-1}(h)$, že se jejich počet v intervalu $(t, t+h)$ zmenší o 1, je přímo úměrná počtu strojů, které jsou v čase t opravovány, tj.

$$\binom{j}{1} (\mu h + o(h))^1 (1 - \mu h + o(h))^{j-1} \approx j \mu h + o(h), \quad 1 \leq j \leq r,$$

resp.

$$\binom{r}{1} (\mu h + o(h))^1 (1 - \mu h + o(h))^{r-1} \approx r \mu h + o(h), \quad r < j \leq N.$$

- Pravděpodobnost, že se počet nepracujících strojů změní v intervalu $(t, t+h)$ o více než ± 1 , je řádově $o(h)$.

Označme $X(t)$ počet nepracujících strojů v čase t . Pak $\{X_t, t \geq 0\}$ je konečný Markovův řetězec se spojitým časem. Pro příslušné dílčí intenzity přechodu (viz věta 5.6 a následující poznámka) dostaneme

$$q_{j,j+1} = (N-j)\lambda, \quad 0 \leq j < N,$$

$$q_{j,j-1} = j\mu, \quad 1 \leq j \leq r,$$

$$q_{j,j-1} = r\mu, \quad r < j \leq N,$$

$$q_{jk} = 0 \text{ ve všech ostatních případech.}$$

Celkové intenzity přechodu určíme analogicky s využitím věty 5.6 a poznámky následující za větou 5.7

$$q_0 = N\lambda,$$

$$q_j = (N-j)\lambda + j\mu, \quad 1 \leq j \leq r,$$

$$q_j = (N-j)\lambda + r\mu, \quad r < j < N,$$

$$q_N = r\mu.$$

Tím je plně určena matice intenzit přechodu \mathbf{Q} pro uvažovaný Markovův řetězec, protože platí $q_{jj} = -q_j$ pro všechna $j = 0, 1, \dots, N$. Spočteme

příslušné limitní pravděpodobnosti. Soustava lineárních algebraických rovnic (5.3) má tvar

$$\begin{aligned} -N\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 &= 0, \\ (N-j+1)\lambda\pi_{j-1} - ((N-j)\lambda + j\mu)\pi_j + (j+1)\mu\pi_{j+1} &= 0, \quad 1 \leq j < r, \\ (N-j+1)\lambda\pi_{j-1} - ((N-j)\lambda + r\mu)\pi_j + r\mu\pi_{j+1} &= 0, \quad r \leq j < N, \\ \lambda\pi_{N-1} - r\mu\pi_N &= 0. \end{aligned}$$

Řešením uvedené soustavy dostaneme

$$\begin{aligned} \pi_j &= \binom{N}{j} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \pi_0, \quad 1 \leq j < r, \\ \pi_j &= \frac{N(N-1) \dots (N-j+1)}{r! r^{j-r}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \pi_0, \quad r \leq j \leq N. \end{aligned}$$



Doporučujeme Vám, abyste uvedenou soustavu lineárních algebraických rovnic samostatně vyřešili. Není to tak jednoduché, jak to na první pohled vypadá.

Hodnota π_0 se určí z podmínky $\sum_{j=0}^N \pi_j = 1$.



Kontrolní úkol 5.2. Provoz telefonní ústředny. Uvažujte telefonní ústřednu s N linkami. Předpokládejte, že v časovém intervalu $(t, t+h)$ přijde na telefonní ústřednu hovor s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$, kde $\lambda > 0$ je konstanta. Hovory přicházejí na ústřednu nezávisle, přitom pravděpodobnost, že během intervalu $(t, t+h)$ přijdou dva nebo více hovorů, je $o(h)$. Pokud je všech N linek obsazeno, další hovor se ztrácí. Za předpokladu, že doba trvání hovoru je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením (s parametrem $\mu > 0$), je pravděpodobnost ukončení hovoru, který trvá v čase t , v průběhu intervalu $(t, t+h)$ rovna $\mu h + o(h)$.

Nechť X_t je počet obsazených linek v ústředně v čase t . Pak $\{X_t\}_{t \geq 0}$ je zřejmě konečný Markovův řetězec se spojitým časem. Určete matici intenzit přechodu a příslušné limitní pravděpodobnosti.



Pojmy k zapamatování:

- Markovův řetězec se spojitým časem (konečný řetězec),
- Markovův řetězec homogenní,
- Markovův řetězec nehomogenní,
- množina stavů řetězce,
- počáteční rozdělení pravděpodobností,
- soustava matic pravděpodobností přechodu,
- Chapmanova-Kolmogorovova rovnost,

- celková intenzita přechodu,
- dílčí intenzita přechodu,
- matice intenzit přechodu,
- Kolmogorovovy diferenciální rovnice (retrospektivní, prospektivní),
- limitní pravděpodobnosti.

Shrnutí

Tato kapitola je věnována problematice Markovových řetězců s diskrétními stavy a spojitým časem, speciálně konečným Markovovým řetězcům se spojitým časem. Zavádíme v ní postupně základní pojmy teorie (např. množina stavů řetězce, pravděpodobnosti přechodů, vektor počátečního rozdělení pravděpodobností), přičemž některé pojmy z předcházející kapitoly lze převzít (např. rozložitelné a nerozložitelné řetězce, schéma klasifikace stavů). Dále odvozujeme Chapmanovu-Kolmogorovovu rovnost (jako nástroj pro dokazování dalších vlastností Markovových řetězců se spojitým časem), Kolmogorovovy diferenciální rovnice (pro výpočet absolutních pravděpodobností stavů řetězce v daném čase) a vztahy pro určení limitních pravděpodobností.



Korespondenční úkol 2

Pokuste se definovat nějaký Markovův řetězec s diskrétními stavy a diskrétním časem a provést jeho podrobnější analýzu.



Vaše práce by měla mít následující strukturu:

1. definice Markovova řetězce,
2. podrobnější popis stavů tohoto Markovova řetězce a přechodových pravidel,
3. sestavení matice pravděpodobností přechodu,
4. klasifikace stavů řetězce,
5. určení stacionárního rozdělení (pokud existuje),
6. interpretace získaných teoretických výsledků.

6. SPOČETNÉ MARKOVOVY ŘETĚZCE SE SPOJITÝM ČASEM

Po prostudování této kapitoly:

- pochopíte některé odlišnosti spočetných řetězců od řetězců konečných (zejména zavedení stavu $s_{+\infty}$),
- naučíte se řešit Kolmogorovovy diferenciální rovnice pro spočetné Markovovy řetězce,
- naučíte se počítat limitní pravděpodobnosti pro spočetné Markovovy řetězce,
- seznámíte se s některými speciálními případy spočetných Markovových řetězců se spojitým časem (Poissonův proces, procesy množení a procesy množení a zániku).

Markovovy řetězce se spojitým časem byly obecně definovány již v kapitole 5. Proto nepřekvapuje, že předpoklady tam vyslovené a vztahy tam odvozené zůstávají v platnosti i pro spočetné řetězce. V této kapitole se budeme zabývat především řešením Kolmogorovových diferenciálních rovnic s využitím aparátu vytvářejících funkcí a výpočtem limitních pravděpodobností. Podstatná část této kapitoly bude věnována prakticky významným aplikacím spočetných Markovových řetězců se spojitým časem (Poissonův proces, procesy množení, procesy množení a zániku). Systémům hromadné obsluhy bude vyhrazena samostatná kapitola.



6.1. Zvláštnosti spočetných Markovových řetězců

V případě spočetných řetězců nevyplývá z předpokladu spojitosti pravděpodobností přechodu zprava v bodě 0 (viz vztah (5.1)) existence konečných intenzit přechodu ani rovnost mezi celkovou intenzitou přechodu a součtem příslušných dílčích intenzit přechodu. Spočetné řetězce, pro něž uvedené vztahy neplatí, nejsou z praktického hlediska důležité, a proto se omezíme jen na takové spočetné řetězce, pro které platí tvrzení 5.5 a 5.6.

Množinu stavů spočetného řetězce doplníme o speciální **stav** $s_{+\infty}$, do něhož se systém dostane po vykonání nekonečně mnoha přechodů a v němž pak už setrvává. Je třeba si uvědomit, že pro některé spočetné řetězce může platit $\sum_{j=1}^{\infty} p_j(t) < 1$, pak rozdíl $1 - \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t)$ představuje pravděpodobnost přechodu systému v čase t do stavu $s_{+\infty}$.

Stav $s_{+\infty}$

6.2. Kolmogorovovy diferenciální rovnice a jejich řešení

Pro soustavu Kolmogorovových diferenciálních rovnic platí analogické věty jako v případě konečných řetězců se spojitým časem.



Věta 6.1. Pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t)$, $1 \leq i, j < +\infty$, ve spočetném řetězci se stavem $s_{+\infty}$ splňují retrospektivní i prospektivní soustavu Kolmogorovových diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(t) &= \mathbf{Q} \mathbf{P}(t), \\ \mathbf{P}'(t) &= \mathbf{P}(t) \mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (6.1)$$



Věta 6.2. Necht' \mathbf{Q} je libovolná nekonečná matice taková, že

- $q_{ij} \geq 0$ pro všechna $i \neq j$,
- $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$.

Pak obě soustavy (6.1) mají totéž jediné řešení vyhovující počáteční podmínce $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$. Toto řešení reprezentuje soustavu matic pravděpodobností přechodu nějakého spočetného Markovova řetězce se spojitým časem a se stavem $s_{+\infty}$. Pro pravděpodobnosti přechodu do stavu

$$s_{+\infty} \text{ platí } p_{i,+\infty} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}(t).$$

Základní úlohou je určení absolutních pravděpodobností jednotlivých stavů v čase t při pevně zvoleném počátečním stavu s_i , tj. určení i -tého řádku matice $\mathbf{P}(t)$. Tyto pravděpodobnosti $p_j(t)$, $t > 0$, jsou pro pevně zvolený počáteční stav s_i rovny $p_{ij}(t)$ a vypočtou se řešením prospektivní soustavy Kolmogorovových diferenciálních rovnic, jež má nyní tvar

$$p'_j(t) = -q_j p_j(t) + \sum_{v \neq j} p_v(t) q_{vj}, \quad 1 \leq j < +\infty, \quad (6.2)$$

s počáteční podmínkou $p_i(0) = 1$, $p_j(0) = 0$ pro $j \neq i$.

Soustavu (6.2) nekonečně (spočetně) mnoha rovnic můžeme obecně řešit tak, že nejprve nalezneme řešení konečného počtu N rovnic o N neznámých a pak provedeme limitní přechod pro $N \rightarrow +\infty$.

V praxi se často setkáváme s takovými spočetnými Markovovými řetězci, v nichž jsou možné pouze přechody z daného stavu do stavů sousedních, tj. z daného stavu s_j do stavu s_{j-1} nebo do stavu s_{j+1} .

V takových případech se s výhodou používá **vytvorující funkce** ve tvaru

$$\Pi(s, t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t) s^j. \quad (6.3)$$

Vytvořující funkce
 $\Pi(s, t)$



Vytvořující funkce $\Pi(s, t)$ je konstruována podobně jako funkce definovaná v odstavci 2.1. Je to však funkce dvou proměnných: pomocné reálné proměnné s a času t .

Jsou-li intenzity přechodu polynomické funkce v proměnné j , můžeme použít následujícího postupu.

1. Nejprve vynásobíme j -tou rovnicí soustavy (6.2) faktorem s^j a takto upravené rovnice sečteme přes všechna j . Tímto postupem dostaneme jedinou lineární parciální diferenciální rovnici pro $\Pi(s, t)$ s počáteční podmínkou ve tvaru $\Pi(s, 0) = s^j$.
2. Řešení $\Pi(s, t)$ zmíněné parciální diferenciální rovnice rozvineme v mocninnou řadu v proměnné s . Hledané absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ jsou pak koeficienty „stojící“ při s^j .

Další podrobnosti o metodě založené na vytvořující funkci (6.3) uvedeme až při řešení konkrétních příkladů.

6.3. Limitní pravděpodobnosti

Při řešení některých úloh vystačíme pouze s určením limitních pravděpodobností. Pro spočetné Markovovy řetězce se spojitým časem platí následující věta.

Věta 6.3. Pro existenci limitních pravděpodobností $\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t)$ nezávislých na počátečním stavu s_i a splňujících podmínky $\pi_j > 0, 1 \leq j < +\infty, \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1$, je nutné a postačující, aby soustava algebraických rovnic

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i q_{ij} = 0, \text{ nebo v maticovém tvaru } \boldsymbol{\pi} \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

měla právě jedno řešení vyhovující uvedeným podmínkám.

Důkaz je naznačen ve skriptech [4]. □

Je zřejmé, že se pro výpočet limitních pravděpodobností užívá formálně stejné soustavy lineárních algebraických rovnic jako v případě konečných Markovových řetězců se spojitým časem. Jediný rozdíl spočívá v tom, že vektor limitních pravděpodobností $\boldsymbol{\pi}$ i matice intenzit přechodu \mathbf{Q} mají nekonečnou (spočetnou) dimenzi.

6.4. Poissonův proces

V praxi často potřebujeme počítat události téhož typu, které nastávají náhodně v čase s podmínkou, že v nějakém krátkém časovém intervalu $(t, t+h)$ uvažovaná událost nastane s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$, přitom nezávisle na t a na počtu událostí, jež nastanou v intervalu $(0, t)$.

Dále se předpokládá, že pravděpodobnost výskytu více událostí v intervalu $(t, t+h)$ je nekonečně malá veličina řádu vyššího než h , tedy $o(h)$.

Uvedeme nejprve příklady uvažovaných událostí: registrace dopadajících částic kosmického záření vhodným čítačem, počet volání přicházejících na nějakou telefonní ústřednu, počet dopravních nehod registrovaných v nějaké oblasti, počet zákazníků přicházejících do nějaké prodejny, počet infekčních onemocnění v nějakém městě apod.

Předpokládejme, že počet registrovaných událostí v časovém intervalu $(0, t)$ je $X_t = j$. Pak pro pravděpodobnosti přechodu $p_{jk}(h)$, $k \neq j$, během intervalu $(t, t+h)$ můžeme psát

$$p_{j,j+1}(h) = \lambda h + o(h),$$

$$p_{jk}(h) = o(h) \text{ v ostatních případech.}$$

Pak $\{X_t, t \geq 0\}$ je zřejmě spočetný Markovův řetězec se spojitým časem, s počátečním rozdělením $p_0(0) = 1$, $p_j(0) = 0$ pro $j \geq 1$ a intenzitami přechodu

$$q_{j,j+1} = \lambda \text{ pro } j \geq 0,$$

$$q_{jk} = 0 \text{ v ostatních případech } (k \neq j).$$

Poissonův proces

Definovaný řetězec se nazývá **Poissonův (čítací) proces**. Matice intenzit přechodu Poissonova procesu má tvar (stavy číslovány od $j = 0$)

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & \lambda & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Kolmogorovy diferenciální rovnice (6.2) mají v tomto konkrétním případě tvar

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t),$$

$$p'_j(t) = -\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) \text{ pro } 1 \leq j < +\infty.$$

Tyto rovnice můžeme řešit postupně jednu po druhé, výhodnější je však použít vytvořující funkce (6.3). Vynásobením j -té rovnice faktorem s^j a sečtením všech těchto upravených rovnic pro $1 \leq j < +\infty$ dostaneme

$$\sum_{j=0}^{\infty} p'_j(t) s^j = -\lambda \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) s^j + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} p_{j-1}(t) s^j.$$

Nyní využijeme definičního vztahu (6.3) pro vytvořující funkci $\Pi(s, t)$.

Zřejmě platí

$$\sum_{j=0}^{\infty} p'_j(t) s^j = \frac{\partial \Pi(s, t)}{\partial t}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} p_{j-1}(t) s^j = s \sum_{j=1}^{\infty} p_{j-1}(t) s^{j-1} = s \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) s^k,$$

takže předcházející rovnici můžeme přepsat ve tvaru

$$\frac{\partial \Pi(s, t)}{\partial t} = (-\lambda + \lambda s) \Pi(s, t)$$

s počáteční podmínkou $\Pi(s, 0) = s^0 = 1$. Pro pevně zvolené s je to obyčejná homogenní lineární rovnice 1. řádu s obecným řešením

$$\Pi(s, t) = C(s) e^{-\lambda t} e^{\lambda s t}.$$

Z počáteční podmínky $\Pi(s, 0) = 1$ dostaneme $C(s) = 1$. Nalezené řešení rozvineme v nekonečnou řadu v proměnné s

$$\Pi(s, t) = e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j s^j}{j!},$$

kteřá konverguje pro všechna t . Hledané absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ jsou koeficienty této mocninné řady „stojící“ při s^j , takže

$$p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}, \quad 0 \leq j < +\infty, \quad t > 0.$$

Rozdělení pravděpodobností jednotlivých stavů v čase t je tedy Poissonovo rozdělení s parametrem λt . Dále ukážeme, že

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) = e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = 1,$$

což znamená, že v případě Poissonova procesu není nutno zavádět stav $s_{+\infty}$. Doby setrvání v jednotlivých stavech s_0, s_1, \dots jsou zřejmě nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením o parametru λ .

Poznámka. Veškeré úvahy v tomto odstavci byly provedeny za předpokladu, že λ nezávisí na čase t . Tento předpoklad však často nebývá splněn. Např. provoz telefonní ústředny v pracovních dnech je v době od 6.00 do 17.00 mnohem silnější než ve večerních hodinách.

6.5. Lineární proces množení

V tomto odstavci budeme uvažovat nějakou populaci, jejíž jedinci jsou nezávislí, mají schopnost generovat nové jedince téhož druhu, ale nemohou zanikat. Předpokládáme, že každý jedinec může během krátkého časového intervalu $(t, t+h)$ generovat nového jedince s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$, přičemž pravděpodobnost produkování dvou a více jedinců je zanedbatelně malá - $o(h)$. V populaci o velikosti j jedinců je pravděpodobnost vzniku nového jedince

$$p_{j,j+1}(h) = \binom{j}{1} (\lambda h + o(h))^1 (1 - \lambda h + o(h))^{j-1} = j\lambda h + o(h).$$

Nechť X_t značí počet jedinců uvažované populace v čase t . Pak $\{X_t, t \geq 0\}$ je spočetný Markovův řetězec se spojitým časem s počátečním rozdělením $p_i(0) = 1$ a $p_j(0) = 0$ pro $j \neq i$, kde i označuje počáteční velikost populace. Pro intenzity přechodu takového řetězce zřejmě platí

$$q_{j,j+1} = j\lambda, \quad j \geq i,$$

$$q_{jk} = 0 \text{ v ostatních případech } (k \neq j).$$

Lineární proces
množení

Právě definovaný řetězec se nazývá **lineární proces množení** (Intenzita růstu populace je lineární funkcí času.) nebo také **Yuleův proces**. Matice intenzit přechodu tohoto řetězce má tvar (stavy číslovány od $j = 0$)

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -2\lambda & 2\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -3\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -j\lambda & j\lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -(j+1)\lambda & (j+1)\lambda & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Pro absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ tohoto řetězce můžeme psát (viz rovnice (6.2))

$$p_i'(t) = -i\lambda p_i(t),$$

$$p_j'(t) = -j\lambda p_j(t) + (j-1)\lambda p_{j-1}(t) \text{ pro } j > i.$$

Stejným postupem jako v případě Poissonova procesu (tj. vynásobením j -té rovnice faktorem s^j a sečtením všech takto upravených rovnic) dostaneme

$$\frac{\partial \Pi(s, t)}{\partial t} = (-\lambda s + \lambda s^2) \frac{\partial \Pi(s, t)}{\partial s} \quad (6.4)$$

s počáteční podmínkou $\Pi(s, 0) = s^i$. Rovnice (6.4) je parciální diferenciální rovnice 1. řádu, přitom lineární a homogenní. K jejímu řešení použijeme následující větu (viz např. [15]).



Věta 6.4. Nechť je dána parciální diferenciální rovnice

$$X_1(x_1, x_2) \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2) \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0,$$

kde $\varphi(x_1, x_2)$ je neznámá funkce a $X_1(x_1, x_2)$, $X_2(x_1, x_2)$ jsou známé funkce. Spolu s touto rovnicí uvažujme pomocnou obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2)}$$

Je-li $\varphi(x_1, x_2) = C$ obecné řešení pomocné rovnice, pak $f(\varphi(x_1, x_2))$ je obecné řešení dané parciální diferenciální rovnice, přičemž f je libovolná diferencovatelná funkce.

Nyní aplikujeme právě uvedenou větu na rovnici (6.4) upravenou na tvar

$$\lambda s(s-1) \frac{\partial \Pi(s, t)}{\partial s} - \frac{\partial \Pi(s, t)}{\partial t} = 0.$$

Příslušná pomocná rovnice

$$\frac{ds}{\lambda s(s-1)} = -dt$$

má obecné řešení $\ln \frac{s-1}{s} = -\lambda t + \text{konst.}$, neboli $\frac{s-1}{s} e^{\lambda t} = C$, kde C je libovolná konstanta. Obecné řešení parciální diferenciální rovnice (6.4) má podle uvedené věty tvar

$$\Pi(s, t) = f\left(\frac{s-1}{s} e^{\lambda t}\right).$$

Funkci f určíme z počáteční podmínky $\Pi(s, 0) = s^i$, tedy $f\left(\frac{s-1}{s}\right) = s^i$.

Zavedeme-li substituci $x = \frac{s-1}{s}$, a tedy $s = \frac{1}{1-x}$, dostaneme

$f(x) = \frac{1}{(1-x)^i}$. Proto je obecné řešení rovnice (6.4)

$$\Pi(s, t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{s-1}{s} e^{\lambda t}\right)^i}.$$

Pro absolutní pravděpodobnosti jednotlivých stavů pak dostaneme (rozvinutím $\Pi(s, t)$ v řadu podle mocnin pomocné proměnné s)

$$p_j(t) = \binom{j-1}{j-i} e^{-i\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{j-i} \text{ pro } j \geq i.$$

Také v tomto případě lze ukázat, že platí $\sum_{j=i}^{\infty} p_j(t) = 1$, takže není nutné zavádět stav $s_{+\infty}$.

Poznámka. Ve speciálním případě $i=1$ se vztah pro absolutní pravděpodobnosti zjednoduší na tvar

$$p_j(t) = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{j-1} \text{ pro } j \geq 1.$$

Nalezené pravděpodobnosti pak zřejmě reprezentují geometrické rozdělení.

6.6. Obecný proces množení

Uvažujeme opět nějakou populaci, jejíž jedinci se chovají nezávisle a mohou se pouze rozmnožovat. Na rozdíl od předcházejícího případu, kdy

je intenzita růstu populace přímo úměrná její okamžité velikosti, tj. $j\lambda$, budeme předpokládat, že je tato intenzita složitější funkcí velikosti populace, konkrétně λ_j . Dále je nutno předpokládat $\lambda_j > 0$ pro všechna $j \geq 1$. Kdyby pro některé N platilo $\lambda_N = 0$, pak by byl příslušný Markovův řetězec konečný.

Nechť X_t značí velikost populace v čase t , přitom počáteční velikost populace $X_0 = i$. Pak $\{X_t, t \geq 0\}$ je zřejmě spočetný Markovův řetězec se spojitým časem s počátečním rozdělením $p_i(0) = 1$ a $p_j(0) = 0$ pro $j > i$ a intenzitami přechodu

$$q_{j,j+1} = \lambda_j \text{ pro } j \geq i,$$

$$q_{jk} = 0 \text{ v ostatních případech } (k \neq j).$$

Takto definovaný řetězec se nazývá **obecný proces množení**. Matice intenzit přechodu má tedy tvar (stavy číslovány od $j = i$)

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_i & \lambda_i & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda_{i+1} & \lambda_{i+1} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda_{i+2} & \lambda_{i+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ jednotlivých stavů vyhovují Kolmogorovově soustavě diferenciálních rovnic

$$p_i'(t) = -\lambda_i p_i(t),$$

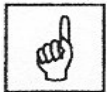
$$p_j'(t) = -\lambda_j p_j(t) + \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) \text{ pro } j > i.$$

Postupným řešením těchto rovnic dostaneme

$$p_i(t) = e^{-\lambda_i t},$$

$$p_j(t) = \lambda_{j-1} e^{-\lambda_j t} \int_0^t e^{\lambda_j s} p_{j-1}(s) ds \text{ pro } j > i.$$

Na otázku, kdy je v obecném procesu množení nutno zavést stav $s_{+\infty}$, odpovídá následující věta.



Věta 6.5. V obecném procesu množení je $\sum_{j=i}^{\infty} p_j(t) = 1$ pro všechna $t \geq 0$ (není nutno zavést stav $s_{+\infty}$) tehdy a jen tehdy, když platí

$$\sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} = +\infty.$$

Důkaz tohoto tvrzení je uveden ve skriptech [4]. □

Poznámka. Oba procesy množení (lineární i obecný) mají v praxi jen malý význam, protože v reálném světě neexistují populace, jejichž jedinci

Obecný
proces množení

nepodléhají zániku. Nicméně, uvedených procesů je možno použít např. k modelování krátkodobého růstu kolonie bakterií v prostředí s dostatkem živin.

6.7. Lineární proces množení a zániku

Uvažujme nějakou populaci nezávislých jedinců, kteří se mohou nejen rozmnožovat, ale i zanikat. Budeme předpokládat, že každý jedinec může během dostatečně krátkého intervalu $(t, t+h)$ generovat nového jedince s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$ a zaniknout s pravděpodobností $\mu h + o(h)$.

Nechť X_t značí počet jedinců v čase t , přitom pro jednoduchost $X_0 = 1$. Je-li $X_t = j$, pak pro pravděpodobnosti přechodu v intervalu $(t, t+h)$ platí:

$$\begin{aligned} p_{j,j+1}(h) &= j\lambda h + o(h) \text{ pro } j \geq 0, \\ p_{j,j-1}(h) &= j\mu h + o(h) \text{ pro } j \geq 1, \\ p_{jk}(h) &= o(h) \text{ v ostatních případech } (k \neq j). \end{aligned}$$

Náhodný proces $\{X_t, t \geq 0\}$ je zřejmě spočetný Markovův řetězec se spojitým časem, intenzitami přechodu

$$\begin{aligned} q_{j,j+1} &= j\lambda \text{ pro } j \geq 0, \\ q_{j,j-1} &= j\mu \text{ pro } j \geq 1, \\ q_{jk} &= 0 \text{ v ostatních případech } (k \neq j) \end{aligned}$$

a počáteční podmínkou $p_1(0) = 1, p_j(0) = 0$ pro $j > 1$. Tento řetězec se nazývá **lineární proces množení a zániku**, protože intenzity množení i zániku jsou lineárními funkcemi okamžité velikosti populace.

Lineární proces množení a zániku

Matice intenzit přechodu má tvar (stavy číslovány od $j = 0$)

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -2(\lambda + \mu) & 2\lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3\mu & -3(\lambda + \mu) & 3\lambda & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 4\mu & -4(\lambda + \mu) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Z tvaru matice \mathbf{Q} je zřejmé, že stav s nulovou velikostí je stavem absorpčním.

Příslušné absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ jsou řešením Kolmogorovovy soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= \mu p_1(t), \\ p_j'(t) &= -j(\lambda + \mu)p_j(t) + (j-1)\lambda p_{j-1}(t) + (j+1)\mu p_{j+1}(t), \text{ pro } j \geq 1 \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $p_1(0) = 1, p_j(0) = 0$ pro $j > 1$.

Tuto soustavu můžeme převést (způsobem ukázaným v odstavcích 6.4 a 6.5) na parciální diferenciální rovnici

$$\left[\lambda s^2 - (\lambda + \mu)s + \mu \right] \frac{\partial \Pi(s, t)}{\partial s} - \frac{\partial \Pi(s, t)}{\partial t} = 0 \quad (6.5)$$

s počáteční podmínkou $\Pi(s, 0) = s$.

Pomocná obyčejná diferenciální rovnice (podle věty 6.4) má tvar

$$\frac{ds}{\lambda s^2 - (\lambda + \mu)s + \mu} = -dt. \quad (6.6)$$

Při řešení rovnice (6.5) rozlišíme dva případy: $\lambda \neq \mu$ a $\lambda = \mu$.

A. Uvažujme nejprve obecnější případ $\lambda \neq \mu$. Pomocná rovnice (6.6) má obecné řešení

$\frac{\mu - \lambda s}{1 - s} e^{-(\lambda - \mu)t} = C$, takže obecné řešení parciální diferenciální rovnice (6.5) hledáme ve tvaru

$$\Pi(s, t) = f\left(\frac{\mu - \lambda s}{1 - s} e^{-(\lambda - \mu)t}\right),$$

kde funkci f určíme z počáteční podmínky

$$\Pi(s, 0) = f\left(\frac{\mu - \lambda s}{1 - s}\right) = s.$$

Po zavedení substituce $x = \frac{\mu - \lambda s}{1 - s}$ dostaneme $s = f(x) = \frac{\mu - x}{\lambda - x}$. Odtud získáme řešení rovnice (6.5) ve tvaru

$$\Pi(s, t) = \frac{\mu - \frac{\mu - \lambda s}{1 - s} e^{-(\lambda - \mu)t}}{\lambda - \frac{\mu - \lambda s}{1 - s} e^{-(\lambda - \mu)t}} = \frac{\mu(1 - e^{(\lambda - \mu)t}) - s(\lambda - \mu e^{(\lambda - \mu)t})}{(\mu - \lambda e^{(\lambda - \mu)t}) - \lambda s(1 - e^{(\lambda - \mu)t})}.$$

Pro zjednodušení výpočtu zavedeme označení

$$B(t) = \frac{1 - e^{(\lambda - \mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda - \mu)t}}.$$

Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \Pi(s, t) &= \frac{1}{1 - \lambda B(t)s} \left[\mu B(t) - \frac{\lambda - \mu e^{(\lambda - \mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda - \mu)t}} s \right] = \frac{\mu B(t) - (\lambda B(t) + \mu B(t) - 1)s}{1 - \lambda B(t)s} = \\ &= \mu B(t) + (1 - \lambda B(t))(1 - \mu B(t)) \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda B(t))^{j-1} s^j. \end{aligned}$$

Pro absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ tedy platí

$$p_0(t) = \mu B(t),$$

$$p_j(t) = (1 - \lambda B(t))(1 - \mu B(t)) (\lambda B(t))^{j-1} \quad \text{pro } j \geq 1.$$

Při řešení praktických úloh je důležité spočítat pravděpodobnost w úplného zániku (extinkce) uvažované populace. Pro tuto pravděpodobnost dostaneme

$$w = \lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu B(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu(1 - e^{(\lambda - \mu)t})}{\mu - \lambda e^{(\lambda - \mu)t}} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \lambda \leq \mu \\ \frac{\mu}{\lambda} & \text{pro } \lambda > \mu \end{cases}$$

Z uvedeného vztahu vyplývá, že pro $\lambda \leq \mu$ populace s jistotou zanikne, zatímco v případě $\lambda > \mu$ je pravděpodobnost extinkce populace rovna $\frac{\mu}{\lambda}$.

B. ve speciálním případě $\lambda = \mu$ má pomocná diferenciální rovnice (6.6) tvar

$$\frac{ds}{(s-1)^2} = -\lambda dt$$

a její obecný integrál je $\lambda t + \frac{1}{1-s} = C$. Proto obecné řešení parciální diferenciální rovnice (6.5) hledáme ve tvaru

$$\Pi(s, t) = f\left(\lambda t + \frac{1}{1-s}\right).$$

Z počáteční podmínky dostaneme

$$\Pi(s, 0) = f\left(\frac{1}{1-s}\right) = s. \text{ Po zavedení substituce } x = \frac{1}{1-s} \text{ máme } s = \frac{x-1}{x},$$

$$\text{a tedy } f(x) = \frac{x-1}{x}.$$

Hledané řešení parciální diferenciální rovnice (6.5) je

$$\Pi(s, t) = \frac{\lambda t + \frac{1}{1-s} - 1}{\lambda t + \frac{1}{1-s}}.$$

Toto řešení upravíme a rozvedeme v mocninnou řadu v proměnné s

$$\Pi(s, t) = \frac{\frac{\lambda t}{\lambda t + 1} + \frac{1 - \lambda t}{\lambda t + 1} s}{1 - \frac{\lambda t}{\lambda t + 1} s} = \frac{\lambda t}{\lambda t + 1} + \frac{1}{(\lambda t + 1)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda t}{\lambda t + 1}\right)^{j-1} s^j.$$

Odtud určíme hledané absolutní pravděpodobnosti jednotlivých stavů

$$p_0(t) = \frac{\lambda t}{\lambda t + 1},$$

$$p_j(t) = \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(\lambda t + 1)^{j+1}} \text{ pro } j \geq 1.$$

Pro pravděpodobnost **zániku (extinkce)** populace dostaneme

$$w = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda t}{\lambda t + 1} = 1,$$

což je ve shodě s tím, co jsme zjistili v případě **A**.

**Zánik (extinkce)
populace**

V obou řešených případech lineárního procesu množení a zániku lze ukázat, že není nutno zavádět stav $s_{+\infty}$.

6.8. Obecný proces množení a zániku

Obecný proces
množení a zániku

Na rozdíl od předcházejícího případu, kdy intenzity růstu i úbytku velikosti populace byly lineárními funkcemi okamžité velikosti populace j , budeme nyní předpokládat, že tyto závislosti jsou popsány obecně výrazy λ_j , resp. μ_j . Tím dostaneme **obecný proces množení a zániku**, což je spočetný Markovův řetězec $\{X_t, t \geq 0\}$ se spojitým časem a intenzitami přechodu

$$\begin{aligned} q_{j,j+1} &= \lambda_j \text{ pro } j \geq 0, \\ q_{j,j-1} &= \mu_j \text{ pro } j \geq 1, \\ q_{jk} &= 0 \text{ v ostatních případech.} \end{aligned}$$

Matice intenzit přechodu má zřejmě tvar (stavy číslovány od $j = 0$)

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \lambda_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 & -(\lambda_4 + \mu_4) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ jsou řešením Kolmogorovovy soustavy diferenciálních rovnic

$$p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t),$$

$$p'_j(t) = -(\lambda_j + \mu_j) p_j(t) + \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) + \mu_{j+1} p_{j+1}(t) \text{ pro } j \geq 1,$$

s počáteční podmínkou $p_i(0) = 1$ a $p_j(0) = 0$ pro $j \neq i$. Omezíme se jen na dva prakticky důležité případy.

A. Předpokládejme, že všechny intenzity růstu i poklesu velikosti populace jsou kladné, tj. $\lambda_j > 0$ pro $j \geq 0$ $\mu_j > 0$ pro $j \geq 1$. Ukážeme, jak se spočtou limitní pravděpodobnosti $\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t)$.



Věta 6.6. Necht' $\rho_0 = 1$, $\rho_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j}$ pro $j \geq 1$. Pak limitní pravděpodobnosti $\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t)$, nezávislé na počátečním stavu s_i , vesměs kladné a splňující podmínku $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$, existují tehdy a jen tehdy, když $\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j < +\infty$. Pro tyto limitní pravděpodobnosti platí

$$\pi_j = \frac{\rho_j}{\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k} \text{ pro } j \geq 0.$$

Důkaz. Podle věty 6.3 stačí vyšetřit soustavu algebraických rovnic $\pi\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, konkrétně soustavu

$$\begin{aligned} -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 &= 0, \\ -(\lambda_j + \mu_j)\pi_j + \lambda_{j-1}\pi_{j-1} + \mu_{j+1}\pi_{j+1} &= 0 \text{ pro } j \geq 1. \end{aligned}$$

Označíme-li $K_j = \mu_j\pi_j - \lambda_{j-1}\pi_{j-1}$ pro $j \geq 1$, pak dostaneme

$K_1 = 0$, $K_j = K_{j+1}$ pro $j \geq 1$, což znamená $K_1 = K_2 = \dots = 0$. Odtud plyne

$$\pi_j = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} \pi_{j-1} = \frac{\lambda_{j-1}\lambda_{j-2}}{\mu_j\mu_{j-1}} \pi_{j-2} = \dots = \rho_j\pi_0 \text{ pro } j \geq 1.$$

Z podmínky $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j = 1$ vyplývá, že limitní pravděpodobnosti

existují tehdy a jen tehdy, když $\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j < +\infty$, a $\pi_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j}$. \square

B. Nyní budeme předpokládat, že $\lambda_0 = 0$ a všechny ostatní intenzity růstu i poklesu velikosti populace jsou kladné, tj. $\lambda_j > 0$ pro $j > 0$ $\mu_j > 0$ pro $j \geq 1$. V tomto případě je zřejmě stav s nulovou velikostí populace stavem absorpčním. Ukážeme si, jak se spočtou pravděpodobnosti extinkce populace za předpokladu, že její počáteční velikost je $X_0 = i$, tj. pravděpodobnosti $w_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{i0}(t)$, $i \geq 1$.

Věta 6.7. Necht' $\sigma_j = \frac{\mu_1\mu_2 \dots \mu_j}{\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_j}$, $j \geq 1$. Pak jsou pravděpodobnosti extinkce populace rovny

$$w_i = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } \sum_{j=i}^{\infty} \sigma_j = +\infty, \\ \frac{\sum_{j=i}^{\infty} \sigma_j}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j}, & \text{jestliže } \sum_{j=i}^{\infty} \sigma_j < +\infty, \end{cases}$$

a to pro všechna $i \geq 1$.

Důkaz tohoto tvrzení, poměrně složitý, lze nalézt ve skriptech [4]. \square

Pro úplnost uvádíme, že podmínka $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} = +\infty$ je postačující k tomu, abychom nemuseli zavádět stav $s_{+\infty}$.

Poznámka. Procesy množení a zániku mají mnoho praktických aplikací v nejrůznějších oborech, např. v populační dynamice, v epidemiologii,

v reakční kinetice a v teorii hromadné obsluhy. Problematice systémů hromadné obsluhy bude věnována následující kapitola.

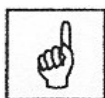


Kontrolní otázky

1. Vysvětlete význam stavu $s_{+\infty}$ při analýze spočetných Markovových řetězců se spojitým časem. Jaká je pravděpodobnost toho, že se systém do stavu $s_{+\infty}$ dostane?
2. Vysvětlete princip metody řešení Kolmogorovových diferenciálních rovnic založený na použití vytvořující funkce $\Pi(s, t)$. Kdy je možno tuto metodu použít?



V této kapitole jste poznali základní aplikace teorie spočetných Markovových procesů se spojitým časem. Předpokládáme, že jste věnovali dostatečnou pozornost řešení jednotlivých příkladů, abyste pochopili princip jejich řešení a dokázali samostatně řešit podobné úlohy s konkrétními hodnotami parametrů a konkrétní počáteční podmínkou. Proto jsme v této části neuváděli žádné příklady k řešení.



Pojmy k zapamatování:

- stav $s_{+\infty}$ (stav s hodnotou procesu $+\infty$),
- vytvořující funkce $\Pi(s, t)$,
- Poissonův proces (čítací proces),
- lineární proces množení (Yuleův proces),
- obecný proces množení,
- lineární proces množení a zániku,
- obecný proces množení a zániku,
- zánik (extinkce) populace.



Shrnutí

V této kapitole se zabýváme problematikou spočetných Markovových procesů se spojitým časem. Většina pojmů a poznatků zavedených v předcházející kapitole zůstává v platnosti, nově zavádíme stav $s_{+\infty}$ (stav s hodnotou procesu $+\infty$) a vysvětlujeme speciální metodu řešení soustavy Kolmogorovových rovnic založenou na využití vytvořující funkce $\Pi(s, t)$. Podstatná část kapitoly je věnována vybraným aplikacím spočetných Markovových řetězců se spojitým časem (Poissonův proces, lineární proces množení, obecný proces množení, lineární proces množení a zániku a obecný proces množení a zániku). V těchto aplikacích se zaměřujeme především na určení absolutních pravděpodobností jednotlivých stavů procesu v daném čase t .

7. TEORIE HROMADNÉ OBSLUHY

Po prostudování této kapitoly:

- poznáte strukturu systémů hromadné obsluhy a pochopíte principy jejich činnosti,
- poznáte základní charakteristiky systémů hromadné obsluhy,
- naučíte se analyticky řešit vybrané úlohy s využitím poznatků z teorie Markovových řetězců se spojitým časem.

Úvodní část této kapitoly se zabývá strukturou systému hromadné obsluhy a popisem základních charakteristik jeho prvků (vstupní tok požadavků, mechanismus obsluhy, režim obsluhy, režim fronty). Podrobnější poučení o této problematice naleznete např. v publikaci [11]. Ukážeme, že na systémy hromadné obsluhy lze výhodně aplikovat poznatky z teorie Markovových řetězců se spojitým časem. V závěru kapitoly pak ukážeme, jak se analyticky řeší vybrané úlohy z teorie hromadné obsluhy.



7.1. Struktura systémů hromadné obsluhy

Teorie hromadné obsluhy je speciální obor aplikované matematiky, ve kterém se opakovaně vyskytují požadavky na provedení jisté posloupnosti operací, jejichž výskyt i trvání jsou zpravidla náhodné.

Systém hromadné obsluhy je možno definovat jako systém tvořený jednou nebo více paralelními linkami (kanály) pro obsluhu přicházejících požadavků (zákazníků).

Základními prvky systémů hromadné obsluhy (dále ve zkratce SHO) jsou tedy:

- 1) **požadavky** (zákazníci),
- 2) **obsluhovací linky** (kanály obsluhy).

SHO pracuje tak, že k nějakému zařízení (jedna nebo více paralelních linek obsluhy) přicházejí požadavky (zákazníci) vyžadující obsluhu. Každý SHO má konečný, popř. spočetný, počet obsluhovacích linek; toto číslo určuje maximální počet paralelně (současně) obsluhovaných požadavků – tzv. kapacitu obsluhy.

Je-li volné místo pro obsluhu (volná obsluhovací linka), požadavek se přijme a ihned se zahájí jeho obsluha. V případě, že není volná žádná obsluhovací linka, může se SHO chovat různě.

Systém hromadné
obsluhy

Požadavky
Obsluhovací linky

- Každý další požadavek se staví do fronty a čeká, dokud se některá z obslužných linek neuvolní. Takové SHO se nazývají **systemy s čekací frontou**.
- Každý další požadavek je odmítnut. V tomto případě jde o **systemy s odmítáním požadavků (systemy se ztrátami)**.
- Kombinováním obou předcházejících typů jsou **systemy smíšené** (např. **systemy s omezenou délkou fronty** nebo **systemy s „netrpělivými“ zákazníky**).

Základní charakteristiky SHO jsou:

- vstupní tok požadavků (frekvence neboli intenzita vstupu),
- mechanismus obsluhy (kapacita obsluhy, délka trvání obsluhy, dostupnost obsluhy),
- režim obsluhy (způsob obsazování linek přicházejícími, popř. čekajícími požadavky, priority v obsluze),
- režim fronty (způsob řazení požadavků do čekací fronty, výběr požadavků z fronty).

7.2. Vstupní tok požadavků

Vstupní tok požadavků je zřejmě náhodný proces, přičemž registrovanou událostí je příchod požadavku na vstup SHO.

V tomto odstavci se budeme věnovat jen základním typům vstupního toku požadavků.

Poissonův vstupní tok

Poissonův vstupní tok (elementární vstupní tok) není zřejmě nic jiného než Poissonův proces, kterému jsme se podrobně věnovali v odstavci 6.4. Necht' X_t je počet požadavků, které vstoupily do SHO do času t za předpokladu, že $X_0 = 0$. Pak $\{X_t, t \geq 0\}$ je Poissonův proces, pro nějž platí

$$P(X_t = k) = p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \text{ pro } k = 0, 1, \dots$$

Intenzita Poissonova vstupního toku je zřejmě rovna střední hodnotě počtu požadavků, jež do systému vstoupily za čas t , tedy

$$EX_t = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k(t) = \lambda t.$$

Náhodné veličiny T_1, T_2, \dots , které udávají délky časových intervalů mezi dvěma po sobě jdoucími vstupy požadavků mají exponenciální rozdělení s parametrem λ , střední hodnotou $1/\lambda$ a rozptylem $1/\lambda^2$. Příklady

Poissonova vstupního toku: příchody volání do nějaké telefonní ústředny nebo vstupy zákazníků do nějaké prodejny ve vhodně zvoleném časovém intervalu, kdy λ lze považovat za konstantní.

Erlangův vstupní tok

Erlangův vstupní tok je možno charakterizovat tak, že náhodné veličiny T_1, T_2, \dots udávající délky časových intervalů mezi vstupy po sobě přicházejících požadavků mají Erlangovo rozdělení řádu k , tj. jejich hustota pravděpodobnosti je dána vztahem

$$f_k(t) = \frac{b^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-bt},$$

kde $t \geq 0, k = 1, 2, \dots, b > 0$.

Regulární vstupní tok je charakterizován tím, že požadavky vstupují do SHO po jednom v okamžicích vzdálených od sebe o d časových jednotek. Jeho intenzita je rovna $\frac{1}{d}$. Příkladem takového vstupního toku jsou příjezdy vlaků do vybrané stanice Metra.

Regulární vstupní tok

O **deterministickém vstupním toku** mluvíme v případě, kdy požadavky vstupují do SHO jen v zadaných diskrétních časových okamžicích.

Deterministický vstupní tok

7.3. Mechanismus obsluhy

Mechanismus obsluhy se popisuje pomocí tří základních charakteristik.

Trvání doby obsluhy specifikuje časový interval potřebný k obsluze jednoho požadavku. V idealizovaném případě lze dobu trvání obsluhy považovat za konstantní.

Doba trvání obsluhy

Nejčastěji se předpokládá, že doba obsluhy je náhodná veličina, jež má exponenciální rozdělení s parametrem $\mu > 0$, tj. náhodná veličina s hustotou pravděpodobností

$$f(t) = \mu e^{-\mu t}, t \geq 0.$$

Typickým příkladem je doba obsluhy zákazníka v nějaké prodejně.

Někdy se také uvažuje Erlangovo rozdělení nebo rozdělení s časově proměnnými parametry (obsluha trpící únavou).

Kapacita obsluhy udává maximální počet paralelně obsluhovaných požadavků. Nejčastěji je kapacita obsluhy rovna určitému, předem zadanému přirozenému číslu n .

Kapacita obsluhy

V některých případech se uvažují i systémy s neomezenou kapacitou (kapacitou rovnou $+\infty$). Tato matematická abstrakce je užitečná u takových SHO, kde počet obsluhovacích linek je tak velký, že požadavky nemusí čekat na obsluhu, tj. nevytváří se žádná fronta.

Existují i takové SHO, kde kapacita není jednoznačně definována. Např. v kadeřnictví může být současně obsluhován (rozpracován) různý počet zákazníků.

Dostupnost obsluhy. U SHO s jedinou obsluhovací linkou se udávají frekvence a délky časových intervalů, kdy obsluha není možná (přestávky v obsluze).

Dostupnost obsluhy

V případě SHO s více linkami je nutno definovat rozdělení kapacity obsluhy v čase.

7.4. Režim obsluhy

Tento režim určuje především způsob obsazování linek a také respektuje priority jednotlivých požadavků. V SHO s jednou linkou se uvolněná linka obsazuje ihned vstupem nového požadavku, přičemž tento požadavek může vstupovat buď z okolí systému nebo z čekací fronty.

U vícelinkového SHO je nejčastější takový případ, kdy každý požadavek může být obslužen libovolnou linkou, přitom existují tři základní možnosti.

- Vstupující požadavky ihned obsazují volné linky podle nějakého, předem zadaného pravidla.
- Jsou-li všechny linky obsazeny, vytváří se u každé linky vlastní fronta a požadavky se v okamžiku svého vstupu rozhodují, do které fronty se zařadí.
- Vstupující požadavky vytvářejí jednu společnou frontu a vstupují do obsluhy na té lince, která se uvolní.

Priorita

Různé typy požadavků mohou mít v SHO různé **priority**. Předpokládejme, že je právě obsluhován požadavek s danou prioritou a na vstupu se objeví nějaký požadavek s prioritou vyšší. V takovém případě existují dvě možnosti.

Slabá priorita

- Započatá obsluha je normálně dokončena a teprve pak vstoupí požadavek s vyšší prioritou (tzv. **slabá priorita**).

Silná priorita

- Započatá obsluha je okamžitě přerušena a zahájí se obsluha požadavku s vyšší prioritou (**silná priorita**). Požadavek, jehož obsluha byla přerušena, se buď vrací zpět do čekací fronty anebo odchází ze systému neobslužen.

7.5. Režim fronty

Režim fronty představuje především soubor pravidel, jež určují, jak se chová požadavek, který nemůže být ihned obslužen. Navíc se zabývá problematikou výběru požadavků z fronty.

SHO se v podstatě rozděluje do dvou skupin:

- **systémy se ztrátami**, v nichž se fronta nevytváří a požadavek, jenž nemůže být ihned obslužen, ze systému odchází;
- **systémy s čekací frontou**, ve kterých se fronty vytvářejí.

V systémech s čekací frontou bývá většinou délka fronty nějakým způsobem omezena.

Systém s omezenou délkou fronty je charakterizován tím, že požadavky, které již nelze umístit do fronty, se odmítají. Příkladem může být parkoviště u čerpací stanice.

V **systému s „netrpělivými“ požadavky** je režim takový, že požadavky, které by měly čekat déle, než je stanoveno, systém opouštějí.

V **uzavřeném systému** je obsluhován jen omezený počet požadavků, např. nákladní auta obsluhovaná nějakým nakladačem.

Pro výběr požadavků z fronty se používají následující režimy:

- nejčastěji **režim FIFO** (první na vstupu do fronty, první také na výstupu),
- ve skladovacích systémech **režim LIFO** (poslední na vstupu, první na výstupu),
- **režim SIRO** (náhodný výběr z čekajících požadavků).

Režim FIFO

Režim LIFO

Režim SIRO

7.6. Klasifikace systémů hromadné obsluhy

Pro klasifikaci SHO se užívá podle Kendalla tři hledisek:

- náhodný proces popisující vstupní tok požadavků,
- rozdělení pravděpodobností pro dobu trvání obsluhy,
- počet obsluhovacích linek.

Typ SHO se zapisuje ve tvaru $(X/Y/n)$, kde X, Y jsou kódy, jejichž význam je uveden v tab. 7.1, a n udává počet obsluhovacích linek.

Tab. 7.1. Tabulka kódů v Kendallově klasifikaci SHO

Kód	X	Y
M	Poissonův proces vstupu	Exponenciální rozdělení doby obsluhy
E_k	Erlangův vstupní tok řádu k	Erlangovo rozdělení řádu k doby obsluhy
D	Deterministický vstupní tok	Konstantní doba obsluhy
G	Obecný případ – žádné předpoklady o procesu vstupu požadavků	Obecné rozdělení doby obsluhy

Tato klasifikace není ovšem úplná. V každém případě je nutno dodat informace o režimu obsluhy a režimu fronty.

Z matematického hlediska je nejlépe propracována teorie systémů typu $(M/M/n)$, která vychází z teorie Markovových řetězců se spojitým časem.

7.7. Metody řešení úloh

V zásadě existují dva přístupy k řešení úloh týkajících se SHO:

- analytické metody, jejichž výsledkem jsou absolutní pravděpodobnosti jednotlivých stavů SHO nebo alespoň limitní pravděpodobnosti,
- počítačová simulace, která poskytuje numerické hodnoty platné s jistou pravděpodobností pro zadané hodnoty vstupních parametrů.

Simulační řešení je mnohem pracnější (mnoho experimentů pro různé kombinace hodnot vstupních parametrů), ale nezávislé na komplikovanosti a rozsáhlosti vzájemných vazeb v SHO.

7.8. Systém $(M/M/\infty)$

Předpoklad, že počet obsluhovacích linek $n = \infty$ je skutečně reálný, odpovídá situaci, kdy počet těchto linek je tak velký, že se netvoří žádná fronta. Poissonův vstupní tok s parametrem λ (kód M) znamená, že

pravděpodobnost vstupu nového požadavku během dostatečně krátkého časového intervalu $(t, t+h)$ je $\lambda h + o(h)$. Exponenciální rozdělení doby obsluhy (také kód M) má následující interpretaci: je-li daný požadavek obsluhován v čase t , pak pravděpodobnost, že jeho obsluha během intervalu $(t, t+h)$ skončí, je rovna $\mu h + o(h)$.

Označme X_t počet požadavků (počet obsazených obsluhovacích linek) v systému v čase t , přičemž $X_0 = i$. Je-li tedy $X_t = j$, potom pro pravděpodobnosti přechodu v intervalu $(t, t+h)$ můžeme (za předpokladu linearity) psát

$$p_{j,j+1}(h) = \lambda h + o(h) \text{ pro } j \geq 0,$$

$$p_{j,j-1}(h) = j\mu h + o(h) \text{ pro } j \geq 1.$$

Spočetný Markovův řetězec se spojitým časem $\{X_t, t \geq 0\}$ je zřejmě lineární proces množení a zániku s počáteční podmínkou $p_i(0) = 1$ a $p_j(0) = 0$ pro $j \neq i$ a intenzitami přechodu

$$q_{j,j+1} = \lambda \text{ pro } j \geq 0,$$

$$q_{j,j-1} = j\mu \text{ pro } j \geq 1.$$

Pro absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ platí soustava diferenciálních rovnic

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),$$

$$p_j'(t) = -(\lambda + j\mu)p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) + (j+1)\mu p_{j+1}(t), j \geq 1.$$

Tuto soustavu převedeme známým způsobem (vynásobením j -té rovnice faktorem s^j a sečtením všech takových rovnic) na jedinou parciální diferenciální rovnici pro vytvořující funkci $\Pi(s, t)$, čímž dostaneme

$$\mu(1-s) \frac{\partial \Pi(s, t)}{\partial s} - \frac{\partial \Pi(s, t)}{\partial t} = \lambda(1-s)\Pi(s, t) \quad (7.1)$$

s počáteční podmínkou $\Pi(s, 0) = s^i$. Pro řešení této lineární nehomogenní parciální diferenciální rovnice 1. řádu použijeme následující větu (viz [15]).



Věta 7.1. Necht' je dána parciální diferenciální rovnice

$$X_1(x_1, x_2, z) \frac{\partial z(x_1, x_2)}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, z) \frac{\partial z(x_1, x_2)}{\partial x_2} = Z(x_1, x_2, z),$$

kde $z(x_1, x_2)$ je neznámá funkce, $X_1(x_1, x_2, z), X_2(x_1, x_2, z)$ jsou koeficienty a $Z(x_1, x_2, z)$ pravá strana uvedené rovnice (obojí známé funkce). Uvažujme pomocnou soustavu rovnic

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, z)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, z)} = \frac{dz(x_1, x_2)}{Z(x_1, x_2, z)}.$$

Jsou-li $\varphi_1(x_1, x_2, z) = C_1, \varphi_2(x_1, x_2, z) = C_2$ dvě nezávislá řešení pomocné soustavy, pak obecné řešení výchozí parciální diferenciální rovnice má tvar

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = 0,$$

kde f je libovolná diferencovatelná funkce dvou proměnných.

Nyní aplikujeme větu 7.1 na řešení rovnice (7.1). Pomocná soustava dvou obyčejných diferenciálních rovnic má tvar

$$\frac{ds}{\mu(1-s)} = -dt = \frac{d\Pi(s,t)}{\lambda(1-s)\Pi(s,t)}$$

a její dvě nezávislá řešení jsou

$$e^{-\mu t}(s-1) = C_1, e^{-\frac{\lambda}{\mu}t} \Pi(s,t) = C_2.$$

Obecné řešení rovnice (7.1) má tedy tvar

$$f\left(e^{-\mu t}(s-1), e^{-\frac{\lambda}{\mu}t} \Pi(s,t)\right) = 0.$$

Odtud vyjádříme $\Pi(s,t)$ jako nějakou funkci F prvního argumentu

$$\Pi(s,t) = e^{\frac{\lambda}{\mu}t} F\left(e^{-\mu t}(s-1)\right).$$

Tvar funkce F určíme z počáteční podmínky $\Pi(s,0) = e^{\frac{\lambda}{\mu}t} F(s-1) = s^i$. Zavedeme-li substituci $x = s-1$ (a tedy $s = x+1$), dostaneme

$$F(x) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}(x+1)} (x+1)^i.$$

Hledané řešení parciální diferenciální rovnice (7.1) je

$$\Pi(s,t) = e^{\frac{\lambda}{\mu}t} e^{-\frac{\lambda}{\mu}(e^{-\mu t}(s-1)+1)} \left(e^{-\mu t}(s-1)+1\right)^i.$$

Odtud můžeme rozložením v řadu podle mocnin proměnné s a poměrně složitými úpravami získat vztahy pro absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$.

V tomto případě se spokojíme pouze s tím, že nalezneme limitní pravděpodobnosti $\pi_j, j \geq 0$ podle věty 6.6.

V našem případě je $\rho_0 = 1, \rho_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j} = \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j$ pro $j \geq 1$.

Snadno zjistíme, že platí $\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j = e^{\frac{\lambda}{\mu}} < +\infty$, proto pro hledané limitní pravděpodobnosti dostaneme

$$\pi_j = \frac{\rho_j}{\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k} = \frac{\frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{e^{\frac{\lambda}{\mu}}} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!}.$$

Nalezené rozdělení je zřejmě Poissonovo rozdělení s parametrem $\frac{\lambda}{\mu}$.

7.9. Systém $(M/M/n)$

Je-li v čase t přítomno v systému $j \leq n$ požadavků, pak jsou všechny obsluhovány a jejich počet se během časového intervalu $(t, t+h)$ o 1 zvětší

s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$ a o 1 zmenší s pravděpodobností $j\mu h + o(h)$. V případě $j > n$ je obsluhováno pouze n požadavků a zbývajících $j - n$ požadavků musí čekat ve frontě. V tomto případě se počet požadavků v intervalu $(t, t+h)$ o 1 zvětší s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$ a 1 zmenší s pravděpodobností $n\mu h + o(h)$.

Nechť celkový počet požadavků v systému (obsluhovaných i čekajících ve frontě) je X_t . Pak $\{X_t, t \geq 0\}$ je zřejmě proces množení a zániku s intenzitami přechodu (za předpokladu linearity)

$$\begin{aligned} q_{j,j+1} &= \lambda \text{ pro } j \geq 0, \\ q_{j,j-1} &= j\mu \text{ pro } 1 \leq j \leq n, \\ q_{j,j-1} &= n\mu \text{ pro } n < j < +\infty. \end{aligned}$$

Pro absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$ jednotlivých stavů platí soustava diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ p_j'(t) &= -(\lambda + j\mu) p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) + (j+1)\mu p_{j+1}(t) \text{ pro } 1 \leq j < n, \\ p_j'(t) &= -(\lambda + n\mu) p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) + n\mu p_{j+1}(t) \text{ pro } n \leq j < +\infty. \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $p_i(0) = 1$ a $p_j(0) = 0$ pro $j \neq i$. Stejně jako v odstavci 7.8 se spokojíme s určením limitních pravděpodobností podle věty 6.6. V uvažovaném případě dostaneme

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1, \\ \rho_j &= \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j \text{ pro } 1 \leq j \leq n, \\ \rho_j &= \frac{n^n}{n!} \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^j \text{ pro } n < j < +\infty. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že řada $\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j = \sum_{j=0}^n \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^j$ konverguje právě

tehdy, když $\frac{\lambda}{\mu} < n$. Její součet označme R . Rozlišíme dva případy.

Je-li $\frac{\lambda}{\mu} < n$, pak limitní rozdělení existuje a platí

$$\begin{aligned} \pi_j &= \frac{1}{j!R} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j \text{ pro } 0 \leq j \leq n, \\ \pi_j &= \frac{n^n}{n!R} \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^j \text{ pro } n < j < +\infty. \end{aligned}$$

Je-li $\frac{\lambda}{\mu} \geq n$, pak limitní rozdělení neexistuje. Tuto situaci můžeme interpretovat tak, že fronta se prodlužuje „do nekonečna“.

7.10. Systém (M/M/1)

Tento systém je speciálním případem systému (M/M/n), vztahy odvozené v předcházejícím odstavci mají jednodušší tvar. Pro součet řady $\sum_{j=0}^{\infty} \rho_j$ zřejmě platí

$$R = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \quad \text{pro } \frac{\lambda}{\mu} < 1,$$

$$R = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = +\infty \quad \text{pro } \frac{\lambda}{\mu} \geq 1.$$

Limitní rozdělení existuje pouze v případě $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, platí

$$\pi_j = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \quad \text{pro } j \geq 0.$$

Limitní pravděpodobnosti mají tedy geometrické rozdělení s parametrem $\frac{\lambda}{\mu}$. Limitní rozdělení můžeme interpretovat jako rozdělení počtu požadavků v nějakém ustáleném provozu systému.

Na závěr tohoto odstavce ukážeme, jak se pomocí známého limitního rozdělení počítají základní provozní charakteristiky systému (M/M/1).

Střední hodnota počtu požadavků v systému je rovna

$$\sum_{j=1}^{\infty} j \pi_j = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}.$$

Střední hodnota
počtu požadavků

Pro **rozptyl počtu požadavků** v systému dostaneme

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^2 \pi_j - \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2}.$$

Rozptyl počtu
požadavků

Poznámka. Při výpočtu $\sum_{j=1}^{\infty} j\pi_j$ a $\sum_{j=1}^{\infty} j^2\pi_j$ se využívá věty o derivaci

konvergentní řady. Věta se aplikuje na řadu $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j$.

Sřední hodnota
délky fronty

Sřední hodnota délky fronty se počítá ze vztahu

$$\sum_{j=1}^{\infty} j\pi_{j+1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{j=1}^{\infty} j\pi_j = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}.$$

Spočteme rozdíl mezi středními hodnotami počtu požadavků a délkou

fronty, dostaneme
$$\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} - \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Výsledek je na první pohled paradoxní. Očekávali bychom, že tento rozdíl bude roven 1.



Kontrolní úkol 7.1. Uvažujte SHO se dvěma obsluhujícími linkami (např. dvojitá telefonní budka). Pravděpodobnost příchodu zákazníka během časového intervalu $(t, t+h)$ je $\lambda h + o(h)$. Pravděpodobnost, že zákazník, který je v čase t ještě obsluhován, bude v průběhu intervalu $(t, t+h)$ obslužen, je $\mu h + o(h)$. Zákazníci, jež nemohou být ihned obsluženi, se řadí do jediné fronty.

- Sestavte diferenciální rovnice pro absolutní pravděpodobnosti $p_j(t)$, že v čase t bude v systému celkem (v obsluze i ve frontě) právě j zákazníků.
- Zjistěte, zda existují v tomto případě limitní pravděpodobnosti a pokud ano, spočtěte je.
- Určete střední hodnotu počtu zákazníků v systému za ustáleného provozu.



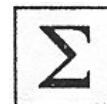
Pojmy k zapamatování:

- systém hromadné obsluhy (SHO),
- požadavek (zákazník),
- obsluhovací linka (kanál obsluhy),
- systém s čekací frontou,
- systém s odmítáním požadavků (systém se ztrátami),
- smíšený systém,
- Poissonův vstupní tok,
- Erlangův vstupní tok,
- regulární vstupní tok,
- deterministický vstupní tok,
- doba trvání obsluhy,
- kapacita obsluhy,
- dostupnost obsluhy,

- priorita v obsluze (slabá priorita, silná priorita),
- režimy fronty (FIFO, LIFO, SIRO),
- střední hodnota počtu požadavků v systému,
- rozptyl počtu požadavků v systému,
- střední hodnota délky fronty.

Shrnutí

Tato kapitola je věnována speciálně problematice systémů hromadné obsluhy. Obsahuje jednak popis struktury systému hromadné obsluhy a základních charakteristik jeho prvků, jednak analytická řešení vybraných systémů, jmenovitě systémů $(M/M/\infty)$ a $(M/M/n)$, $n \in \mathbf{N}$. Pro uvedené systémy jsou spočteny limitní pravděpodobnosti jednotlivých stavů vztahující se k ustálenému provozu. V závěrečném odstavci, věnovaném systému $(M/M/1)$, je vysvětleno, jak se z hodnot limitních pravděpodobností počítají některé provozní charakteristiky (střední hodnota a rozptyl počtu požadavků v systému, střední hodnota délky fronty).



Korespondenční úkol 3

Pokuste se definovat nějaký Markovův řetězec s diskrétními stavy a spojitým časem a provést jeho podrobnější analýzu.



Vaše práce by měla mít následující strukturu:

1. definice Markovova řetězce,
2. podrobnější popis stavů tohoto Markovova řetězce a přechodových pravidel,
3. vytvoření matice intenzit přechodu,
4. sestavení soustavy diferenciálních rovnic pro výpočet absolutních pravděpodobností jednotlivých stavů,
5. řešení této soustavy, resp. určení stacionárního rozdělení (pokud existuje),
6. interpretace získaných teoretických výsledků.

LITERATURA

- [1] Bailey, N. T. *The Elements of Stochastic Processes with Applications to the Natural Sciences*. New York: Wiley 1963.
- [2] Beneš, V. *Náhodné procesy*. In: *Pravděpodobnost a statistika na střední škole*. Praha: matfyzpress 2005, s. 73-83.
- [3] Dupač, V., Dupačová, J. *Markovovy procesy I*. Praha: SPN 1975.
- [4] Dupač, V., Dupačová, J. *Markovovy procesy II*. Praha: SPN 1980.
- [5] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Application*. Vol. 1. New York: Wiley 1957.
- [6] Frauenthal, J. C. *Mathematical Modelling in Epidemiology*. Berlin: Springer-Verlag, 1980.
- [7] Gantmacher, F. R. *Teorija matric*. Moskva: Nauka 1966.
- [8] Havrda, J. *Stochastické procesy a teorie informace*. Praha: ČVUT Praha 1982.
- [9] Karlin, S. A. *First Course in Stochastic Processes*. New York: Academic Press 1968.
- [10] Karlin, S., Taylor, H. M. *A Second Course in Stochastic Processes*. New York: Academic Press 1981.
- [10] Kořenář, V. *Stochastické procesy*. Praha: VŠE Praha 1998.
- [11] Malík, M. *Počítačová simulace*. Praha: UK Praha 1989.
- [12] Norris, J. R. *Markov Chains*. Cambridge University Press 1997.
- [13] Prášková, Z., Lachout, P. *Základy náhodných procesů I*. Praha: Karolinum 1998.
- [14] Prášková, Z., Lachout, P. *Základy náhodných procesů II*. Praha: Karolinum 2005.
- [15] Stěpanov, V. V. *Kurs diferenciálních rovnic*. Praha: 1952.
- [16] Štěpán, J. *Teorie pravděpodobnosti*. Praha: Academia 1987.

